НУМЕРИЧКА АНАЛИЗА

Садржај • Правила • Упутства

ПРАВИЛА ЗА ПОЛАГАЊЕ ИСПИТА ИЗ НУМЕРИЧКЕ АНАЛИЗЕ У ТОКУ СЕМЕСТРА

Испит се састоји из **писменог** и **усменог** дела. Писмени део испита је **елиминаторан**.

А) ПИСМЕНИ ИСПИТ

а1) Да би стекао право да усмени део испита полаже у току семестра, студент је обавезан да положи задатак из Теме 1 у приложеној табели.

Редни број	Тема (Т)	Начин полагања	Број поена
1	Приближни бројеви и грешке функције	писмено	8
2	Нелинеарне једначине	софтвер	8-10
3	Системи линеарних једначина	софтвер	8-10
4	Системи нелинеарних једначина	софтвер	8-10
5	Полиномска интерполација	софтвер	8-10
6	Апроксимација функција	софтвер	8-10
7	Нумеричко диференцирање и интеграција	софтвер	8-10
8	Диференцијалне једначине	софтвер	6-8

Остале теме су алтернативне: Т2 и Т7, Т3 и Т4, Т5 и Т6. Студент бира по једну (укупно три) од алтернативних тема.

а2) **Минималан број поена:** 32 (8 из Т1 + по 8 из **три по избору** теме од Тема 2-7)

а3) **Максималан број поена:** 38 (8 из Т1 + по 10 из одабраних тема у а2))

а4) **Студент је положио писмени испит** ако је освојио најмање минималан број поена из а2)

Б) УСМЕНИ ИСПИТ

б1) Студент полаже **преостале три** од алтернативних тема - писмено и по потреби усмено

б2) Образац за полагање једне теме садржи **уводна питања** и **главно питање**

б3) Главно питање вреднује се са 4, 6 или 8 поена у складу са **списком испитних питања**. Укупан број поена за уводна питања зависи од броја поена који је додељен главном питању, а у складу са приложеном табелом:

Главно питање	Уводна питања
4	8
6	6
8	4

б4) **Минималан број поена:** 20 (10 поена из уводног дела и 10 поена из скупа главних питања)

б5) **Максималан број поена:** 36

б6) **Студент је положио усмени испит** ако је освојио најмање минималан број поена из б4)

Ц) ЗАВРШНИ ИСПИТ

ц1) Студент је положио испит из Нумеричке анализе ако је положио писмени испит и усмени испит

ц2) Студенту се може доделити до 6 **додатних поена** на основу активности у току семестра (доласци на наставу, семинарски радови, решавање посебно одабраних задатака и сл.)

ц3) Укупан број бодова (УБ) за положени испит рачуна се по формули

$$\boxed{\text{УБ}=(\text{ПП}+\text{ПУ}+\text{ПД})^{*}\ 1.25}$$

где је
ПП - број поена на писменом делу испита
ПУ - број поена на усменом делу испита
ПД - број додатних поена

ц4) Оцена за положени испит изводи се према следећој табели:

УБ	[65-69]	[70-75]	[76-82]	[83-90]	[91-100]
Оцена	6	7	8	9	10

Д) НАПОМЕНЕ

д1) Полагања писменог и усменог дела испита у току семестра изводе се у терминима вежби и предавања, а по потреби и у ванредним терминима

д2) Студенту који је положио испит биће омогућено да **додатно полаже** Тему 8 (софтвер), ради евентуалне корекције оцене. Полагање ће се реализовати на крају семестра.

СПИСАК ИСПИТНИХ ПИТАЊА

Тема	Испитно питање	Поени
1. Приближни бројеви и грешке функције	1.1. Теорема о директном проблему оцене грешке приближне вредности функције.	6
	1.2. Принцип једнаких релативних грешака.	4
2. **Нелинеарне једначине**	2.1. Теорема о оцени грешке приближног решења једначине.	4
	2.2. Регула фалси. Теорема о избору фиксне тачке.	8
	2.3. Регула фалси. Теорема о оцени грешке	6
	2.4. Теореме о непокретној тачки	6
	2.5. Метода итерације. Теорема о конвергенцији и оцени грешке.	6
	2.6. Њутн-Рафсонова метода. Теорема о локалној конвергенцији.	6
	2.7. Њутн-Рафсонова метода. Теорема о избору почетне апроксимације.	8
	2.8. Њутн-Рафсонова метода. Теорема о оцени грешке.	6
3. Системи линеарних једначина	3.1 Метода просте итерације. Теорема о конвергенцији и оцени грешке.	6
	3.2. Јакобијева метода. Теорема о потребном и довољном услову конвергенције.	4
	3.3. Гаус-Зајделова метода. Теорема о потребном и довољном услову конвергенције.	6
4. Системи нелинеарних једначина	4.1. Метода итерације. Теорема о довољном услову конвергенције.	8
	4.2. Метода Њутн-Канторовича за систем од две нелинеарне једначине.	6
5. Полиномска интерполација	5.1. Лагранжов интерполациони полином.	6
	5.2. Њутнов интерполациони полином за нееквидистантне чворове.	8
	5.3. Оцена грешке полиномске интерполације.	6
	5.4. Лема о вези између подељених и коначних разлика.	4
	5.5. Њутнов интерполациони полином за еквидистантне чворове.	6
6. Апроксимација функција	6.1. Метода најмањих квадрата.	8
	6.2. Апроксимација полиномима.	6
	6.3. Преодређени системи линеарних једначина.	4

7. Нумеричка интеграција	7.1. Правило правоугаоника. Теорема о оцени грешке.	6
	7.2. Уопштена формула правоугаоника. Теорема о оцени грешке.	6
	7.3. Трапезно правило. Теорема о оцени грешке.	6
	7.4. Уопштена трапезна формула. Теорема о оцени грешке.	8
	7.5. Симпсоново правило.	6
	7.6. Уопштена Симпсонова формула.	6
	7.7. Теорема о оцени грешке Симпсоновог правила.	8
8. Обичне диференцијалне једначине	8.1. Тејлорова метода.	6
	8.2. Ојлерова метода.	4
	8.3. Метода Рунге-Кута другог реда.	8

УПУТСТВО ЗА ПРИПРЕМУ ИСПИТНИХ ПИТАЊА

1.1. Дефинисати грешке приближне вредности функције. Навести и доказати теорему о оцени грешке приближне вредности функције.
1.2. Дефинисати обратан проблем оцене грешке. Решити проблем у односу на принцип једнаких релативних грешака.

2.1. Исказати и доказати теорему о оцени грешке приближног решења једначине $f(x) = 0$.
2.2. Исказати и доказати теорему о избору фиксне тачке методе регула фалси. Дати геометријску интерпретацију методе.
2.3. Исказати и доказати теорему о оцени грешке методе регула фалси.
2.4. Дефинисати непокретну тачку пресликавања g уз геометријску интерпретацију. Исказати и доказати Шаудерову теорему о егзистенцији непокретне тачке, а затим и теорему о егзистенцији и јединствености такве тачке.
2.5. Објаснити идеју методе итерације, а затим исказати и доказати теорему о конвергенцији и оцени грешке.
2.6. Објаснити идеју Њутн-Рафсонове методе, а затим исказати и доказати теорему о локалној конвергенцији.
2.7. Објаснити идеју Њутн-Рафсонове методе, а затим исказати и доказати теорему о избору почетне апроксимације.
2.8. Објаснити идеју Њутн-Рафсонове методе, а затим исказати и доказати теорему о оцени грешке.

3.1. Написати систем од n линеарних једначина са n непознатих у скаларном и матричном облику. Објаснити идеју методе итерације, а затим исказати и доказати теорему о конвергенцији и оцени грешке.
3.2. Написати систем од n линеарних једначина са n непознатих у скаларном и матричном облику. Објаснити идеју и услове Јакобијеве методе, а затим исказати и доказати теорему о потребним и довољним условима конвергенције.
3.3. Написати систем од n линеарних једначина са n непознатих у скаларном

и матричном облику. Објаснити идеју и услове Гаус-Зајделове методе, а затим исказати и доказати теорему о потребним и довољним условима конвергенције.

4.1. Написати систем од n нелинеарних једначина са n непознатих у скаларном и матричном облику. Објаснити идеју методе итерације, а затим исказати и доказати теорему о довољном услову конвергенције.
4.2. Написати систем од две нелинеарне једначине са две непознате. Извести формуле за решавање тог система методом Њутн-Канторовича.

5.1. Дефинисати интерполациони полином дате функције и истаћи његову улогу. Извести Лагранжов интерполациони полином.
5.2. Дефинисати интерполациони полином дате функције и истаћи његову улогу. Дефинисати подељене разлике и извести Њутнов интерполациони полином за нееквидистантне чворове.
5.3. Дефинисати интерполациони полином дате функције и истаћи његову улогу. Исказати и доказати теорему о оцени грешке полиномске интерполације.
5.4. Дефинисати подељене и коначне разлике и исказати и доказати лему о вези подељених и коначних разлика.
5.5. Дефинисати интерполациони полином дате функције и истаћи његову улогу. Навести формулу о вези подељених и коначних разлика, а затим извести Њутнов интерполациони полином за еквидистантне чворове.

6.1. Објаснити појам апроксимације функције. Дефинисати функцију квадратног одступања, а затим демонстрирати методу најмањих квадрата на примеру уопштеног полинома.
6.2. Објаснити појам апроксимације функције. Дефинисати одступање у општем случају, а затим истаћи идеју методе најмањих квадрата. Написати систем нормалних једначина за уопштени полином, а затим алгебарски полином и систем нормалних једначина за апроксимацију алгебарским полиномом.
6.3. Написати систем од m линеарних једначина са n непознатих. Дефинисати преодређени систем, функцију квадратног одступања, а затим објаснити начин добијања решења преодређеног система линеарних једначина.

7.1. Објаснити проблем нумеричке интеграције, указати на структуру квадратурне формуле и дефинисати алгебарски степен тачности квадратурне формуле. Извести формулу за правило правоугаоника и навести теорему о оцени грешке.
7.2. Објаснити проблем нумеричке интеграције, указати на структуру квадратурне формуле и дефинисати алгебарски степен тачности квадратурне формуле. Навести формулу за правило правоугаоника, а затим извести уопштену формулу правоугаоника и навести теорему о оцени грешке.
7.3. Објаснити проблем нумеричке интеграције, указати на структуру квадратурне формуле и дефинисати алгебарски степен тачности квадратурне формуле. Извести формулу за трапезно правило и навести теорему о оцени грешке.
7.4. Објаснити проблем нумеричке интеграције, указати на структуру квадратурне

формуле и дефинисати алгебарски степен тачности квадратурне формуле. Навести формулу за трапезно правило, а затим извести уопштену трапезну формулу и навести теорему о оцени грешке.
7.5. Објаснити проблем нумеричке интеграције, указати на структуру квадратурне формуле и дефинисати алгебарски степен тачности квадратурне формуле. Извести формулу за Симпсоново правило.
7.6. Објаснити проблем нумеричке интеграције, указати на структуру квадратурне формуле и дефинисати алгебарски степен тачности квадратурне формуле. Навести формулу за Симпсоново правило, а затим извести уопштену Симпсонову формулу и навести теорему о оцени грешке.
7.7. Навести Симсоново правило, а затим исказати и доказати теорему о оцени грешке Симпсоновог правила.

8.1. Дефинисати Кошијев проблем за диференцијалну једначину првог реда. Извести Тејлорову формулу за нумеричко решење диференцијалне једначине првог реда.
8.2. Дефинисати Кошијев проблем за диференцијалну једначину првог реда. Навести Тејлорову формулу, а затим извести Ојлерову формулу за нумеричко решење диференцијалне једначине првог реда.
8.3. Дефинисати Кошијев проблем за диференцијалну једначину првог реда. Извести формуле Рунге-Кута другог реда за нумеричко решење диференцијалне једначине првог реда.

УПУТСТВО ЗА ПРИПРЕМУ УВОДНИХ ПИТАЊА

Нелинеарне једначине

1. Дефинисати и графички интерпретирати интервал изолације корена једначине $f(x) = 0$.
2. Довољан услов за егзистенцију корена једначине $f(x) = 0$ на интервалу (a, b).
3. Довољан услов за егзистенцију и јединственост корена једначине $f(x) = 0$ на интервалу (a, b).
4. Теорема о оцени грешке приближног решења x^* једначине $f(x) = 0$.
5. Навести две методе за решавање једначине $f(x) = 0$ које су засноване на сужавању интервала.
6. Навести две методе за решавање једначине $f(x) = 0$ које су засноване на теореми о фиксној тачки.
7. Итеративни низ за методу половљења интервала. Геометријска интерпретација.
8. Теорема о конвергенцији и оцени грешке методе половљења интервала.
9. Геометријска интерпретација методе регула фалси.
10. Критеријум за избор почетне апроксимације и фиксне тачке у методи регула фалси.
11. Формуле за оцену грешке у методи регула фалси.
12. Дефиниција и геометријска интерпретација фиксне тачке пресликавања g.

13. Довољан услов за егзистенцију фиксне тачке пресликавања g.
14. Довољан услов за егзистенцију и јединственост фиксне тачке пресликавања g.
15. Идеја методе итерације. Формула за итеративни низ и геометријска интерпретација.
16. Теорема о довољном услову конвергенције методе итерације. Исказ.
17. Априорна и апостериорна формула за оцену грешке методе итерације.
18. Ако се Њутн-Рафсонова метода посматра као специјалан случај методе итерације, ког облика је функција $g(x)$? Навести услов за одређивање функције $h(x)$ и одредити $h(x)$ и $g(x)$.
19. Формула за итеративни низ и геометријска интерпретација Њутн-Рафсонове методе.
20. Теорема о локалној конвергенцији Њутн-Рафсонове методе. Исказ.
21. Критеријум за избор почетне апроксимације Њутн-Рафсонове методе.
22. Теорема о оцени грешке Њутн-Рафсонове методе. Исказ. Ред конвергенције методе.

Системи линеарних једначина

1. Дефиниција векторске норме.
2. Примери векторских норми у R^n (апсолутна, еуклидска, униформна).
3. Рачунање векторских норми. Примери.
4. Дефиниција растојања у векторском простору.
5.Примери рачунања растојања у простору R^n у различитим нормама. На пример, израчунати $d(x,y)$ у норми $\|\cdot\|_\infty$ ако је $x=(2,-1,0,4)$, $y=(-1,5,1,-2)$.
6. Дефиниција матричне норме.
7. Примери матричних норми.
8. Рачунање матричних норми. Примери.
9. Дефиниција сагласности матричне и векторске норме. Примери сагласних норми.
10. Идеја и реализација методе просте итерације.
11. Теорема о конвергенцији методе просте итерације. Исказ.
12. Формуле за оцену грешке методе просте итерације. Априорна и апостериорна грешка.
13. Потребан и довољан услов конвергенције итеративног процеса $x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+B,\ k=0,1,\dots$.
14. Јакобијева метода. Декоммпозиција матрице A система $Ax=b$ и трансформација система. Услов за примену методе.
15. Дефиниција дијагоналне доминантности матрице A. Написати услове дијагоналне доминантности на примеру квадратних матрица реда $n=3,4,\dots$.
16. Теорема о довољном услову конвергенције Јакобијеве методе. Исказ.
17. Теорема о потребном и довољном услову конвергенције Јакобијеве методе. Исказ.
18. Гаус-Зајделова метода. Идеја методе и реализација у конкретним ситуаци-

јама. На пример, помоћу којих се компоненти рачуна $x_5^{(3)}$ (непозната x_5 у трећој итерацији) ако систем линеарних једначина има девет непознатих $x_1, \ldots, x_9$?
19. Гаус-Зајделова метода. Трансформација система $Ax = b$ у облик $x = Mx + B$. Итерациони низ методе (матрични и скаларни запис).
20. Довољни услови конвергенције Гаус-Зајделове методе.
21. Теорема о потребном и довољном услову конвергенције Гаус-Зајделове методе. Исказ.

Системи нелинеарних једначина

1. Скаларни и векторски запис система нелинеарних једначина.
2. Трансформација система $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ у облик $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ - векторски и скаларни запис.
3. Јакобијан пресликавања. Одређивање Јакобијана за конкретна пресликавања, нпр. за $\boldsymbol{G}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 + xy^3 - 1 \\ x \sin^2 y \end{bmatrix}$.
4. Ако је $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{D}$ непрекидно прескикавање, образложити неједнакост

$$\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y})\| \leq L_p \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{D},\ \forall p \in \{1, \infty, F\}.$$

Како се уводе L_{ij} и шта су L_1, L_∞ и L_F?
5. Теорема о довољном услову конвергенције и оцени грешке методе итерације. Исказ.
6. Навести формуле за две оцене грешке методе итерације.
7. Написати систем од две нелинеарне једначине са две непознате. Увести величине h_n и k_n и формирати систем једначина за одређивање h_n и k_n у скаларном, а затим и у матричном облику.
8. Дефинисати ред конвергенције итеративног процеса

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^{(n)}), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Навести услов за Јакобијан пресликавања под којим је конвергенција линеарна, односно квадратна.
9. Идеја и реализација методе Њутн-Канторовича у општем случају.
10. Навести формулу за рачунање $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ у методи Њутн-Канторовича. На које пресликавање се односи Јакобијан у тој формули?

Полиномска интерполација

1. Који проблем се решава интерполацијом функције? Дати графичку интерпретацију решења проблема.
2. Како се решава проблем интерполације функције полиномском интерполацијом? Које интерполационе услове задовољава интерполациони полином? Графичка интерпретација услова.
3. Ког степена је у општем случају интерполациони полином који садржи $n+1$

тачку? Да ли је јединствен?
4. Дефинисати грешку полиномске интерполације и дати графичку интерпретацију грешке.
5. Написати Лагранжов интерполациони полином n-тог степена за $n = 2, 3, \ldots$.
6. Ако је $P_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \cdots + L_n(x)f(x_n)$ Лагранжов интерполациони полином, које услове у чворовима интерполације задовољавају полиноми $L_0(x), L_1(x), \cdots, L_n(x)$? Анализирати посебно случајеве $n = 2, 3, \ldots$ и скицирати графике полинома $L_0(x), L_1(x), \cdots, L_n(x)$.
7. Дефинисати подељене разлике првог, другог,...,k-тог реда у чвору x_i.
8. Како се рачунају подељене разлике помоћу вредности функције у чворовима интерполације? Навести конкретне слућајеве ако је број чворова једнак два, три итд.
9. Написати израз за Њутнов интерполациони полином n-тог степена за нееквидистантне чворове. Анализирати случајеве $n = 2, 3, \ldots$.
10. Ако је $P_k(x)$ интерполациони полином који се односи на чворове $x_0, \ldots, x_k$, а $P_{k+1}(x)$ интерполациони полином који се односи на чворове $x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}$, ког облика је разлика $P_{k+1}(x) - P_k(x)$?
11. Дефинисати коначне разлике првог, другог,...,k-тог реда у чвору x_i.
12. Навести везу између подељених и коначних разлика k-тог реда у чвору x_i. Анализирати случајеве $k = 1, 2, 3, \ldots$.
13. Написати израз за први Њутнов интерполациони полином n-тог степена за еквидистантне чворове. Која је веза између промењљивих x и s? Анализирати случајеве $n = 2, 3, \ldots$.
14. Теорема о оцени грешке полиномске интерполације. Исказ.
15. Који проблем се решава инверзном интерполацијом? Геометријска интерпретација решења проблема.
16. Навести изразе за инерполационе полиноме у инверзној интерполацији.

Апроксимација функција

1. Ког облика је апроксимациона функција у општем случају?
2. Како се дефинише одступање експерименталних од апроксимационих вредности?
3. Дефинисати апсолутно и квадратно одступање.
4. Шта се минимизира у методи најмањих квадрата? Из ког услова се одређују апроксимациони коефицијенти?
5. Ког облика је уопштени полином?
6. Написати израз за функцију квадратног одступања ако је апроксимациона функција уопштени полином.
7. Навести запис система нормалних једначина у матричном облику. Како се формира матрица система и шта је непознати вектор у том систему?
8. Како се формира матрица система нормалних једначина ако је апроксимациона функција алгебарски полином m-тог степена? Написати систем нормалних једначина за $m = 2, 3, ...$

9. Навести израз за апроксимациону функцију у случају линеарне зависности и одговарајући систем нормалних једначина. Интерпретирати графички линеарну зависност.
10. Свођење нелинеарних на линеарне зависности.
11. Написати систем од m линеарних једначина са n непознатих у скаларном облику и дефинисати функцију квадратног одступања за тај систем. Изадвојити случајеве $m = 3$, $n = 2$ (уз геометријску интерпретацију једначина и приближног решења система) и $m = 4$, $n = 3$. Изразе за функцију квадратног одступања писати у развијеној форми.
12. Навести услове из којих се одређују непознате преодређеног система од три линеарне једначине са две непознате. Извести систем за одређивање непознатих у овом случају.

Нумеричка интеграција

1. Шта је квадратурна формула?
2. Извести облик квадратурне формуле ако се подинтегрална функција апроксимира Лагранжовим интерполационим полиномом.
3. Дефинисати грешку квадратурне формуле.
4. Дефинисати алгебраски степен тачности m квадратурне формуле. Анализирати случајеве $m = 1, 2, \ldots$. Нпр. ако је алгебарски степен квадратурне формуле једнак 5, за које полимоме облика x^k је тачна та формула?
5. Из којих услове се одређују коефицијенти $A_0, A_1, \ldots, A_n$ у квадратурним формулама Њутн-Котесовог типа? Навести те услове за $n = 2, 3, \ldots$.
6. Извести формулу за правило правоугаонока и дати геометријску интерпретацију правила.
7. Теорема о оцени грешке правила правоугаоника. Исказ и геометријска интерпретација грешке.
8. Извести формулу за трапезно правило и дати геометријску интерпретацију правила.
9. Теорема о оцени грешке трапезног правила. Исказ и геометријска интерпретација грешке.
10. Навести облик квадратурне формуле за Симпсоново правило и услове из којих се одређују непознати коефицијенти A_0, A_1 и A_2.
11. Који алгебарски степен тачности имају формуле правоугаоника, трапезна и Симпсонова формула?
12. Навести теорему о оцени грешке Симпсоновог правила.
Дати геометријску интерпретацију правила.

Диференцијалне једначине

1. Дефинисати Кошијев проблем за диференцијалну једначину првог реда и скицирати график одговарајуће интегралне криве.
2. Представити графички аналитичко и нумеричко решење Кошијевог проблема

на одсечку $[a, b]$ у тачкама $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
3. Навести теорему о егзистенцији и јединствености решења Кошијевог проблема за диференцијалну једначину првог реда.
4. Ако је $y(x)$ тачно решење Кошијевог проблема $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ и $x_{n+1} = x_n + h$, написати Тејлоров развој тог решења у околини тачке x_n закључно са остатком реда $p + 1$.
5. Ако је y_n приближна вредност решења Кошијевог проблема у тачки x_n, навести како се у Тејлоровој методи рачуна y_{n+1} помоћу y_n. Написати израз за полином $T_p(x, y)$.
6. За које p је Ојлерова метода специјалан случај Тејлорове методе? Како се у Ојлеровој методи рачуна y_{n+1}?
7. Којим изразом се у методама Рунге-Кута замењује израз $hT_p(x_n, y_n)$?
8. Навести парове вредности за p и r у методама Рунге-Кута другог и четвртог реда?
9. Навести две варијанте методе Рунге-Кута другог реда.

Предметни наставник:

Др Раде Лазовић