4. ГРУПА

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(xy - xz^2 - 2z^2)\, z'_x + (-y^2 + yz^2)\, z'_y = yz\,.$$

<u>Решење</u>: Придружени систем дате парцијалне j-не je $\dfrac{\mathrm{d}x}{xy - xz^2 - 2z^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{-y^2 + yz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{yz}$. Из $\dfrac{\mathrm{d}y}{-y^2 + yz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{yz}$ добијамо линеарну д.j. $y' + \dfrac{1}{z}y = z$, чије решење $z(3y - z^2) = C_1$ представља први интеграл придруженог система. Из $\dfrac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{-2yz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{yz}$ добијамо j-ну $\mathrm{d}(xy) = -2z\,\mathrm{d}z$, чије решење $xy + z^2 = C_2$ представља још један први интеграл придруженог система. Како су добијени први интеграли очигледно независни, решење полазне парцијалне j-не $z(x,y)$ дефинисано je са $F\big(z(3y - z^2), xy + z^2\big) = 0$, где je $F(\ ,\ )$ произвољна диференцијабилна ф-ја.

2. Одредити све аналитичке ф-је $f : x + iy \to u(x,y) + iv(x,y)$ ако je

$$u(x,y) = \frac{y+1}{x^2 + y^2 + 2y + 1}\,.$$

<u>Решење</u>: Из К-Р услова добијамо $v'_x(x,y) = -u'_y(x,y) = \dfrac{(y+1)^2 - x^2}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$ и $v'_y(x,y) = u'_x(x,y) = \dfrac{-2x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$. Из $v(x,y) = \displaystyle\int v'_y(x,y)\ \mathrm{d}y + \int \left[v'_x(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int v'_y(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\right] \mathrm{d}x$,
$\displaystyle\int v'_y(x,y)\ \mathrm{d}y = \int \frac{-2x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2}\ \mathrm{d}y = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}$ и $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x}\left(\int v'_y(x,y)\ \mathrm{d}y\right) = \frac{(y+1)^2 - x^2}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$,
добијамо $v(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + (y+1)^2} + C$. На крају je $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = \dfrac{(y+1) + ix}{x^2 + (y+1)^2} + iC = \dfrac{(y+1) + ix}{[(y+1) + ix][(y+1) - ix]} + iC = \ \dots\ = \dfrac{i}{x + iy + i} + iC$, односно $f(z) = \dfrac{i}{z + i} + iC$.

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) = 2\cos t - \int_0^t (y''(x) + y(x))\ \sin(t - x)\ \mathrm{d}x\,,$$

ако je $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

<u>Решење</u>: Нека je $y(t) \xrightarrow{L} Y(s)$. Тада je $y''(t) \xrightarrow{L} s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 2$ и $\displaystyle\int_0^t (y''(x) + y(x))\ \sin(t - x)\ \mathrm{d}x = (y''(t) + y(t)) * \sin t \xrightarrow{L} (s^2Y(s) - 2 + Y(s))\frac{1}{s^2+1} = Y(s) - \frac{2}{s^2+1}$.
Након деловања Лапласове тр. на дату диференцијално-интегралну j-ну добијамо алгебарску j-ну $s^2Y(s) - 2 = \dfrac{2s}{s^2+1} - Y(s) + \dfrac{2}{s^2+1}$, чије решење je

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{(s^2+1)^2}\,.$$

Тражена ф-ја $y(t)$ je инверзна Лапласова тр. ф-је $Y(s)$ и може се добити из табличних Лапласових тр. $\sin t \xrightarrow{L} \dfrac{1}{s^2+1}$, $t\sin t \xrightarrow{L} \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$ и $t\cos t \xrightarrow{L} \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$. Добија се

$$y(t) = 2\sin t + t\sin t + (\sin t - t\cos t) = 3\sin t + t(\sin t - \cos t)\,.$$