3. ГРУПА

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(3z-2x)\,z'_x+(xz+yz+2x)\,z'_y=z\,.$$

Решење: Придружени систем дате парцијалне једначине је $\dfrac{\mathrm{d}x}{3z-2x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{xz+yz+2x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$. Из $\dfrac{\mathrm{d}x}{3z-2x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$ добијамо линеарну д.ј. $x'+\dfrac{2}{z}x=3$, чије решење $z^2(x-z)=C_1$ представља први интеграл придруженог система. Из $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{(x+y+3)z}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$ добијамо j-ну $\dfrac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y+3}=\mathrm{d}z$, чије решење $\ln|x+y+3|-z=C_2$ представља још један први интеграл придруженог система. Како су добијени први интеграли очигледно независни, решење полазне парцијалне j-не $z(x,y)$ дефинисано је са $F\big(z^2(x-z),\ln|x+y+3|-z\big)=0$, где је $F(\ ,\ )$ произвољна диференцијабилна ф-ја.

2. Израчунати $\displaystyle\int\limits_{C^+}\frac{\operatorname{sh}z}{(z^2-iz)^2}\,\mathrm{d}z$, ако је $C=\{\,z\colon |z-i|=\sqrt{2}\,\}$.

Решење: С обзиром да је $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}z}{z^2(z-i)^2}$ и $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{sh}z}{z}\overset{\text{л.п.}}{=}\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{ch}z}{1}=\frac{1}{1}=1$, имаћемо

$$\lim_{z\to0}(zf(z))=\lim_{z\to0}\left(\frac{\operatorname{sh}z}{z}\cdot\frac{1}{(z-i)^2}\right)=\left(\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{sh}z}{z}\right)\cdot\left(\lim_{z\to0}\frac{1}{(z-i)^2}\right)=1\cdot\frac{1}{(-i)^2}=-1\neq0\,,$$

па је $z=0$ пол 1. реда и $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\lim_{z\to0}(zf(z))=-1$.

За $z=i$ је $\displaystyle\lim_{z\to i}\big((z-i)^2f(z)\big)=\lim_{z\to i}\frac{\operatorname{sh}z}{z^2}=\frac{\operatorname{sh}i}{i^2}=-\operatorname{sh}i\neq0$, па је $z=i$ пол 2. реда и

$$\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\big((z-i)^2f(z)\big)'=\lim_{z\to i}\left(\frac{\operatorname{sh}z}{z^2}\right)'=\lim_{z\to i}\frac{z\operatorname{ch}z-2\operatorname{sh}z}{z^3}=-(\operatorname{ch}i+2i\operatorname{sh}i)=2\sin1-\cos1\,.$$

На крају, $\displaystyle\int\limits_{C^+}\frac{\operatorname{sh}z}{(z^2-iz)^2}\,\mathrm{d}z=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-i}f(z)\right)=2\pi i(-1+2\sin1-\cos1)\,.$

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''-2y'+2y=e^t(t-2\sin t)\,,$$

ако је $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

Решење: Нека је $y(t)\xrightarrow{L}Y(s)$. Тада је $y'(t)\xrightarrow{L}s\,Y(s)-y(0)=s\,Y(s)-1$ и $y''(t)\xrightarrow{L}s^2Y(s)-s\,y(0)-y'(0)=s^2Y(s)-s+1$. Након деловања Лапласове тр. на дату диференцијалну j-ну добијамо алгебарску j-ну $(s^2Y(s)-s+1)-2\,(s\,Y(s)-1)+2\,Y(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2}-\dfrac{2}{(s-1)^2+1}$, чије решење је

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{s-3}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2[(s-1)^2+1]}-\frac{2}{[(s-1)^2+1]^2}\\&=\frac{s-3}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{(s-1)^2+1}-\frac{2}{[(s-1)^2+1]^2}\\&=\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{3}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{2}{[(s-1)^2+1]^2}\,.\end{aligned}$$

Ако је $Z(s)=\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{3}{s^2+1}+\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{2}{[s^2+1]^2}$ и $Z(s)\xrightarrow{L^{-1}}z(t)$, имаћемо да је $Y(s)=Z(s-1)\xrightarrow{L^{-1}}y(t)=e^tz(t)$. Функцију $z(t)$ можемо добити коришћењем табличних трансформација ф-ја t, $\sin t$, $\cos t$, као и табличне трансформације $t\cos t\xrightarrow{L}\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$. Добићемо да је $z(t)=\cos t-3\sin t+t-(\sin t-t\cos t)$, односно

$$y(t)=e^t[(1+t)\cos t-4\sin t+t]\,.$$