

2. ГРУПА

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(xz + yz + 2y) z'_x + (3z - 2y) z'_y = z.$$

Решење: Придружени систем дате парцијалне једначине је $\frac{dx}{xz + yz + 2y} = \frac{dy}{3z - 2y} = \frac{dz}{z}$. Из $\frac{dy}{3z - 2y} = \frac{dz}{z}$ добијамо линеарну д.ј. $y' + \frac{2}{z}y = 3$, чије решење $z^2(y - z) = C_1$ представља први интеграл придруженог система. Из $\frac{dx + dy}{(x + y + 3)z} = \frac{dz}{z}$ добијамо ј-ну $\frac{d(x + y)}{x + y + 3} = dz$, чије решење $\ln|x + y + 3| - z = C_2$ представља још један први интеграл придруженог система. Како су добијени први интегрални очигледно независни, решење полазне парцијалне ј-не $z(x, y)$ дефинисано је са $F(z^2(y - z), \ln|x + y + 3| - z) = 0$, где је $F(,)$ произвољна диференцијабилна ф-ја.

2. Израчунати $\int_{C^-} \frac{\text{sh } z}{(z^2 + iz)^2} dz$, ако је $C = \{z : |z + i| = \sqrt{2}\}$.

Решење: С обзиром да је $f(z) = \frac{\text{sh } z}{z^2(z + i)^2}$ и $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sh } z}{z} \stackrel{\text{л.п.}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{ch } z}{1} = \frac{1}{1} = 1$, имаћемо

$$\lim_{z \rightarrow 0} (zf(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sh } z}{z} \cdot \frac{1}{(z + i)^2} \right) = \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sh } z}{z} \right) \cdot \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z + i)^2} \right) = 1 \cdot \frac{1}{i^2} = -1 \neq 0,$$

па је $z = 0$ пол 1. реда и $\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (zf(z)) = -1$.

За $z = -i$ је $\lim_{z \rightarrow -i} ((z + i)^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\text{sh } z}{z^2} = \frac{\text{sh}(-i)}{(-i)^2} = \text{sh } i \neq 0$, па је $z = -i$ пол 2. реда и

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -i} ((z + i)^2 f(z))' = \lim_{z \rightarrow -i} \left(\frac{\text{sh } z}{z^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z \text{ch } z - 2 \text{sh } z}{z^3} = -(\text{ch } i + 2i \text{sh } i) = 2 \sin 1 - \cos 1.$$

На крају, $\int_{C^-} \frac{\text{sh } z}{(z^2 + iz)^2} dz = -2\pi i \left(\text{Res } f(z) + \text{Res } f(z) \right) = -2\pi i(-1 + 2 \sin 1 - \cos 1) = 2\pi i(1 + \cos 1 - 2 \sin 1)$.

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-t}(t + 2 \sin t),$$

ако је $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решење: Нека је $y(t) \xrightarrow{L} Y(s)$. Тада је $y'(t) \xrightarrow{L} sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$ и $y''(t) \xrightarrow{L} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s - 2$. Након деловања Лапласове тр. на дату диференцијалну ј-ну добијамо

алгебарску ј-ну $(s^2Y(s) - s - 2) + 2(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{1}{(s + 1)^2} + \frac{2}{(s + 1)^2 + 1}$, чије решење је

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s + 4}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2[(s + 1)^2 + 1]} + \frac{2}{[(s + 1)^2 + 1]^2} \\ &= \frac{s + 4}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2} - \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{2}{[(s + 1)^2 + 1]^2} \\ &= \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2} + \frac{1}{[(s + 1)^2 + 1]^2}. \end{aligned}$$

Ако је $Z(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{[s^2 + 1]^2}$ и $Z(s) \xrightarrow{L^{-1}} z(t)$, имаћемо да је

$Y(s) = Z(s + 1) \xrightarrow{L^{-1}} y(t) = e^{-t}z(t)$. Функцију $z(t)$ можемо добити коришћењем табличних трансформација ф-ја t , $\sin t$, $\cos t$, као и табличне трансформације $t \cos t \xrightarrow{L} \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$. Добићемо да је $z(t) = \cos t + 2 \sin t + t + (\sin t - t \cos t)$, односно

$$y(t) = e^{-t}[(1 - t) \cos t + 3 \sin t + t].$$