1. ГРУПА

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(-x^2 + xz^2)\, z'_x + (xy - yz^2 - 2z^2)\, z'_y = xz\,.$$

Решење: Придружени систем дате парцијалне j-не је $\dfrac{\mathrm{d}x}{-x^2+xz^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{xy - yz^2 - 2z^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{xz}$. Из $\dfrac{\mathrm{d}x}{-x^2+xz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{xz}$ добијамо линеарну д.ј. $x' + \dfrac{1}{z}x = z$, чије решење $z(3x - z^2) = C_1$ представља први интеграл придруженог система. Из $\dfrac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{-2xz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{xz}$ добијамо j-ну $\mathrm{d}(xy) = -2z\,\mathrm{d}z$, чије решење $xy + z^2 = C_2$ представља још један први интеграл придруженог система. Како су добијени први интеграли очигледно независни, решење полазне парцијалне j-не $z(x,y)$ дефинисано је са $F\big(z(3x - z^2), xy + z^2\big) = 0$, где је $F(\ ,\ )$ произвољна диференцијабилна ф-ја.

2. Одредити све аналитичке ф-је $f : x + iy \to u(x,y) + iv(x,y)$ ако је

$$v(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 2y + 1}\,.$$

Решење: Из К-Р услова добијамо $u'_x(x,y) = v'_y(x,y) = \dfrac{-2x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$ и $u'_y(x,y) = -v'_x(x,y) = \dfrac{x^2 - (y+1)^2}{[x^2+(y+1)^2]^2}$. Из $u(x,y) = \displaystyle\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x + \int \left[u'_y(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\right] \mathrm{d}y$, $\displaystyle\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x = \int \frac{-2x(y+1)}{[x^2+(y+1)^2]^2}\ \mathrm{d}x = \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\displaystyle\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x\right) = \dfrac{x^2 - (y+1)^2}{[x^2+(y+1)^2]^2}$, добијамо $u(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2+(y+1)^2} + C$. На крају је $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = \dfrac{(y+1)+ix}{x^2+(y+1)^2} + C = \dfrac{(y+1)+ix}{[(y+1)+ix][(y+1)-ix]} + C = \ \dots\ = \dfrac{i}{x+iy+i} + C$, односно $f(z) = \dfrac{i}{z+i} + C$.

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) + \int_0^t (y''(x) + y(x))\ \sin(t-x)\ \mathrm{d}x = 2\cos t\,,$$

ако је $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

Решење: Нека је $y(t) \xrightarrow{L} Y(s)$. Тада је $y''(t) \xrightarrow{L} s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2Y(s) + 2$ и $\displaystyle\int_0^t (y''(x) + y(x))\ \sin(t-x)\ \mathrm{d}x = (y''(t) + y(t)) * \sin t \xrightarrow{L} (s^2Y(s) + 2 + Y(s))\frac{1}{s^2+1} = Y(s) + \frac{2}{s^2+1}$. Након деловања Лапласове тр. на дату диференцијално-интегралну j-ну добијамо алгебарску j-ну $s^2Y(s) + 2 + Y(s) + \dfrac{2}{s^2+1} = \dfrac{2s}{s^2+1}$, чије решење је

$$Y(s) = -\frac{2}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{2}{(s^2+1)^2}\,.$$

Тражена ф-ја $y(t)$ је инверзна Лапласова тр. ф-је $Y(s)$ и може се добити из табличних Лапласових тр. $\sin t \xrightarrow{L} \dfrac{1}{s^2+1}$, $t\sin t \xrightarrow{L} \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$ и $t\cos t \xrightarrow{L} \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$. Добија се

$$y(t) = -2\sin t + t\sin t - (\sin t - t\cos t) = -3\sin t + t(\sin t + \cos t)\,.$$