1. ГРУПА **МАТЕМАТИКА 3 – МАТЕМАТИКА II** 17.06.2010.

Презиме и име : ______________________________ , број индекса : __________

1. За диференцијалну једначину

$$(xy\cos x + y\ln y)\,\mathrm{d}x + (x+y-1)\,\mathrm{d}y = 0$$

одредити интеграциони фактор облика $\lambda(y)$, а затим решити једначину.

2. Одредити опште решење парцијалне диференцијалне једначине

$$(-2x+y+3z)z'_x + (3z-y)z'_y = z\ .$$

3. Израчунати $\displaystyle\int\limits_{C^+} \frac{\mathrm{d}z}{(2z-\pi)^2\sin z}$, ако је $C = \{z\colon |z| = 2\}$.

4. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x' & = & x & + & y & - & \cos t & & \\ y' & = & -2x & - & y & + & \sin t & + & \cos t \end{array},$$

ако је $x(0) = y(0) = 1$.

2. ГРУПА **МАТЕМАТИКА 3 – МАТЕМАТИКА II** 17.06.2010.

Презиме и име : ______________________________ , број индекса : __________

1. Решити диференцијалну једначину

$$(y^2\cos^2 x - x)\,\mathrm{d}x + 2xy\cos^2 x\,\mathrm{d}y = 0\ .$$

2. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & -x & + & 3y & - & z \\ y' & = & -x & + & y & + & z \\ z' & = & x & - & 2y & & \end{array}.$$

3. Одредити све аналитичке функције $f : x+iy \to u(x,y) + iv(x,y)$, ако је

$$v(x,y) = e^{2xy}\sin(y^2 - x^2)\ .$$

4. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 6te^{-t}\ ,$$

ако је $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ и $y''(0) = 4$.

МА3 – 2. ГРУПА

1 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y^2\cos^2 x}{2xy\cdot\cos^2 x} \Rightarrow y'+\frac{1}{2x}\cdot y=\frac{1}{2\cos^2 x}\cdot y^{-1}$ – Бернулијева ј-на, $z=y^2 \Rightarrow z'=2yy'$ 5б.

$\Rightarrow 2yy'+\frac{1}{x}y^2=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow z'+\frac{1}{x}z=\frac{1}{\cos^2 x}$ – линеарна 10б.

$\Rightarrow z=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\cdot\left[C+\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot dx\right]=\frac{1}{x}\left[C+\int\frac{x}{\cos^2 x}dx\right]=\frac{1}{x}\cdot(C+x\,tg x+\ln|\cos x|) \Rightarrow \underline{xy^2=x\,tg x+\ln|\cos x|+C}$ 10б.

2 $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}(1-\lambda) & 3 & -1\\ -1 & (1-\lambda) & 1\\ 1 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=\ldots=-\lambda(\lambda^2+5)=0 \Rightarrow \underline{\lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\pm\sqrt{5}i}$ су сопств. вред. 6б.

$\lambda_1=0: (A-\lambda_1E)\cdot M=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=0 \Rightarrow\ldots\Rightarrow M=b\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{X_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}e^{0t}}$ 6б.

$\lambda_2=\sqrt{5}i: (A-\lambda_2E)\cdot M=\begin{bmatrix}(1-\sqrt{5}i) & 3 & -1\\ -1 & (1-\sqrt{5}i) & 1\\ 1 & -2 & -\sqrt{5}i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=0 \Rightarrow\ldots\Rightarrow M=\frac{b}{3}\begin{bmatrix}1-2\sqrt{5}i\\ 3\\ \sqrt{5}i-2\end{bmatrix}$ или нпр. $M=\frac{c}{3}\begin{bmatrix}\sqrt{5}i-4\\ -\sqrt{5}i-2\\ 3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X_{kom}=\begin{bmatrix}1-2\sqrt{5}i\\ 3\\ \sqrt{5}i-2\end{bmatrix}\cdot e^{\sqrt{5}it}=\begin{bmatrix}1-2\sqrt{5}i\\ 3\\ \sqrt{5}i-2\end{bmatrix}\cdot(\cos\sqrt{5}t+i\sin\sqrt{5}t)=\ldots=\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\sqrt{5}t+2\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t\\ 3\cos\sqrt{5}t\\ -2\cos\sqrt{5}t-\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t\end{bmatrix}}_{=X_2}+i\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\sin\sqrt{5}t-2\sqrt{5}\cos\sqrt{5}t\\ 3\sin\sqrt{5}t\\ \sqrt{5}\cos\sqrt{5}t-2\sin\sqrt{5}t\end{bmatrix}}_{=X_3}$ 10б.

$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3=\ldots$ 3б.

3 (К-Р): $u'_x=v'_y=2xe^{2xy}\sin(y^2-x^2)+2ye^{2xy}\cos(y^2-x^2)$ 5б.

$u'_y=-v'_x=2xe^{2xy}\cos(y^2-x^2)-2ye^{2xy}\sin(y^2-x^2)$

$\Rightarrow u(x,y)=\int u'_x dx+\int\left[u'_y-\frac{\partial}{\partial y}\int u'_x dx\right]dy=\int e^{2xy}2x\sin(y^2-x^2)dx+\int 2ye^{2xy}\cos(y^2-x^2)dx+\int[\quad]dy$

$=e^{2xy}\cos(y^2-x^2)-\cancel{\int e^{2xy}2y\cos(y^2-x^2)dx}+\cancel{\int 2ye^{2xy}\cos(y^2-x^2)dx}+\int[\quad]dy$

$=e^{2xy}\cos(y^2-x^2)+\int 0\cdot dy=\underline{e^{2xy}\cos(y^2-x^2)+C}$ 15б.

$\Rightarrow f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)=e^{2xy}(\cos(y^2-x^2)+i\sin(y^2-x^2))+C \Rightarrow$ 5б. $\Rightarrow \underline{f(z)=e^{-iz^2}+C}$

4 $\mathcal{L}[y''']+3\mathcal{L}[y'']+3\mathcal{L}[y']+\mathcal{L}[y]=6\cdot\mathcal{L}[te^{-t}]$

$\Rightarrow[s^3Y-s^2\cdot1-s\cdot(-2)-4]+3[s^2Y-s\cdot1-(-2)]+3[s\cdot Y-1]+Y=\frac{6}{(s+1)^2}\Rightarrow\ldots$

$\Rightarrow\underbrace{(s^3+3s^2+3s+1)}_{=(s+1)^3}\cdot Y=\frac{6}{(s+1)^2}+s^2+s+1 \Rightarrow \underline{Y=\frac{6}{(s+1)^5}+\frac{s^2+s+1}{(s+1)^3}}$ 12б. $\ldots$

$\Rightarrow Y=\frac{6}{(s+1)^5}+\frac{1}{(s+1)^3}-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)} \Rightarrow \underline{y(t)=e^{-t}\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}-t+1\right)}$ 13б.