1. ГРУПА 12.02.2010.

МАТЕМАТИКА 3

Презиме и име:____, број индекса:_________

1. Решити диференцијалну једначину

$$y\cos(\ln\frac{y}{x})dx + x\,dy = 0 .$$

2. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= -4x + 8z \\ z' &= x \end{aligned} .$$

3. Одредити све аналитичке функције $f : x + i\,y \to u(x,y) + i\,v(x,y)$, ако је

$$v(x,y) = (y\cos 3x + x\sin 3x)e^{-3y} .$$

4. Применом Лапласове трансформације решити интегралну једначину

$$\int_0^t e^{t-x}\left(y''(x) + 4y(x)\right)dx = t \text{ , ако је } y(0) = 0,\ y'(0) = 0 .$$

2. ГРУПА 12.02.2010.

МАТЕМАТИКА 3

Презиме и име:____, број индекса:_________

1. За диференцијалну једначину $2y\,dx = (\ln y + 2x - 1)dy$,

   одредити интеграциони фактор облика $\lambda(y)$, а затим решити једначину.

2. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$-x^2u'_x + (xy - 5z^5)u'_y + xzu'_z = 0 .$$

3. Израчунати $\int_{C^-} \frac{e^z - 1}{z(z^2+4)^2}dz$, ако је $C = \left\{z \,\middle|\, |z - i| = \sqrt{2}\right\}$.

4. Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y'' + 3y' + 2y = te^{-t} \text{ , ако је } y(0) = 0, y'(0) = 2 .$$

МАТЕМАТИКА 3 12.02.2010.

II ГРУПА

1 $2y\cdot dx+(1-2x-\ln y)\cdot dy=0 \;/\cdot\lambda(y)$

$\frac{\partial}{\partial y}[\lambda(y)\cdot 2y]=\frac{\partial}{\partial x}[\lambda(y)\cdot(1-2x-\ln y)]$

$\int\frac{d\lambda}{\lambda}=-\int 2\cdot\frac{dy}{y}$

$\ln|\lambda|=-2\cdot\ln|y|$

$\Rightarrow \underline{\lambda(y)=y^{-2}}$ 10б.

$\Rightarrow \frac{2}{y}dx+\frac{1-2x-\ln y}{y^2}\cdot dy=0$

$\Rightarrow u(x,y)=\int\frac{2}{y}dx+\int\left[\frac{1-2x-\ln y}{y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{2}{y}dx\right]dy$

$=\frac{2x}{y}+\int\left[\frac{1-\cancel{2x}-\ln y}{y^2}+\frac{\cancel{2x}}{y^2}\right]dy=\left|\begin{matrix}u=1-\ln y\\ dv=\frac{dy}{y^2}\end{matrix}\right|$

$=\frac{2x}{y}+\frac{\ln y}{y}$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{2x+\ln y}{y}=C}$, — О.Р. 15б.

2 $\frac{dx}{-x^2}=\frac{dy}{xy-5z^5}=\frac{dz}{xz}$

I: $\frac{dx}{-x^2}=\frac{dz}{xz}\Rightarrow-\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dz}{z}\Rightarrow C-\ln|x|=\ln|z|\Rightarrow\dots\Rightarrow \underline{xz=C_1}$ 8б.

II: $\frac{y\,dx+x\,dy}{\cancel{-x^2y}+\cancel{x^2y}-5xz^5}=\frac{d(xy)}{-5\cancel{x}z^5}=\frac{dz}{\cancel{x}z}\Rightarrow\int d(xy)=\int-5z^4dz\Rightarrow\dots\Rightarrow\underline{xy+z^5=C_2}$ 12б. лин. независне

$\Rightarrow u(x,y,z)=F(xz,\,xy+z^5)$, $F(\cdot,\cdot)$ произв. диф. ф-ја 5б.

3 $f(z)=\frac{e^z-1}{z(z^2+4)^2}=\frac{e^z-1}{z(z-2i)^2(z+2i)^2}\Rightarrow z_1=0,\ z_2=2i,\ z_3=-2i$ сингуларитети

$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}\cdot\frac{1}{(z^2+4)^2}=1\cdot\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}\neq0\Rightarrow z_1=0$ је отклоњив прекид

$\lim_{z\to2i}f(z)\cdot(z-2i)^2=\lim_{z\to2i}\frac{e^z-1}{z(z+2i)^2}=\frac{e^{2i}-1}{2i\cdot(4i)^2}\neq0\Rightarrow z_2=2i$ је пол 2. реда из $D(C)$

$z_3=-2i\notin D(C)$ 8б.

$\operatorname{Res}_{z=2i}f(z)=\lim_{z\to2i}[(z-2i)^2f(z)]'=\lim_{z\to2i}\left(\frac{e^z-1}{z(z+2i)^2}\right)'=\dots=\lim_{z\to2i}\frac{e^z[z^2+(2i-3)z-2i]+(3z+2i)}{z^2(z+2i)^3}=\dots$

12б. $=\underbrace{\frac{(i-1)e^{2i}+1}{32}}$ $\Rightarrow\int_{C^-}f(z)dz=-2\pi i\frac{(i-1)e^{2i}+1}{32}=\dots=\underbrace{\pi\frac{(1+i)e^{2i}-i}{16}}$ 5б.

4 $\mathcal{L}[y'']+3\mathcal{L}[y']+2\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[te^{-t}]$

$\Rightarrow[s^2Y-2]+3[sY]+2\cdot Y=\frac{1}{(s+1)^2}\Rightarrow(s^2+3s+2)\cdot Y=2+\frac{1}{(s+1)^2}$, $s^2+3s+2=(s+1)(s+2)$

$\Rightarrow Y=\frac{2}{(s+1)(s+2)}+\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}=\dots=\left(\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}\right)+\left(\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{(s+1)^3}+\frac{D}{s+2}\right)=\dots$ 10б.

$\Rightarrow Y=\frac{3}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}-\frac{3}{s+2}$

$\Rightarrow\underbrace{y(t)=\left(3-t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}-3e^{-2t}}_{15б.}$