УСМЕНИ ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

17.12.2010.

СТУДЕНТ: ______________________________ ИНДЕКС: __________

Број бодова на првом колоквијуму: __________

Прва група

1. (1 поен) Функција $f(x,y)$ задовољава Липшицов услов на правоугаонику $P_{a,b}$ ако је

______________________________.

2. (2 поена) Једначина облика $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ је једначина са тоталним диференцијалом

ако је ______________ (навести услов за функције P и Q). Њено опште решење је облика

$F(x,y) =$ ____ где је $dF(x,y) =$ ______________________.

3. (1 поен) Диференцијална једначина облика $F(x, y'', y''') = 0$ се сменом ____________ своди на

диференцијалну једначину првог реда облика ____________________.

4. (2 п) Проверити да ли је $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{bmatrix}$ фундаментална матрица система $\begin{array}{l} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_1 \end{array}$.
Ако јесте, навести опште решење.

◇ Провера првог услова:

♡ Провера другог услова:

♣ Опште решење (ако је Φ фундаментална матрица):

5. (1 поен) Ако је $X(t) = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t)$ опште решење хомогеног система $\dfrac{dX(t)}{dt} = A(t)X$, онда су решења тог система $X_1(t) = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}, \ldots, X_n(t) = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ (попунити матрице-колоне)

____________________________ (каква?)

6. (3 поена) Ако је функција $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$, непрекидно диференцијабилна и различита од константе у области D, интеграл система

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned},$$

онда је

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} f_n = 0, \quad \forall (t, x_1, \ldots, x_n) \in D.$$

Доказати.

Укупно поена: __________

УСМЕНИ ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

17.12.2010.

СТУДЕНТ: ______________________________ ИНДЕКС: __________

Број бодова на првом колоквијуму: __________

Друга група

1. (2 поена) Једначина $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, се сменама ______________________

своди на једначину облика ______________________. која је ______________________ (навести тип једначине).

2. (1 поен) Исказати Пикарову теорему за Кошијев проблем $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$.

3. (2 поена) Свести диференцијалну једначину $x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$ на систем од n диференцијалних једначина првог реда у нормалном облику.

4. (1 поен) Ако је $\lambda = -2$ двоструки корен карактеристичне једначине

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_n = 0 \quad (n \geq 2),$$

онда је партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_ny = xe^{-2x}, \quad (p_i = const)$$

облика $y_p =$ ______________________.

5. (1 поен) Фундаментална матрица $\Phi(t)$ линеарног хомогеног система $\dfrac{dX(t)}{dt} = A(t)X$ задовољава матричну диференцијалну једначину ______________________.

6. (3 поена) Ако су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линеарно независна решења диференцијалне једначине

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

на интервалу (a, b), а $p(x)$ и $q(x)$ непрекидне функције на (a, b), доказати да је

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall x \in (a, b).$$

Укупно поена: __________