ISBN 978-96-7680-188-6

Драган С. Ђорић МАТЕМАТИКА 3 ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

Драган С. Ђорић

МАТЕМАТИКА
3

ЗБИРКА
РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

ФОН
Београд, 2009.

САДРЖАЈ

Решења $y = 2k\pi$ не могу да се добију из оштег решења ни за једну вредност константе C, што значи да су то сингуларна решења.

Смене променљивих

У задацима 9.−11. погодном сменом свести дату диференцијалну једначину на једначину која раздваја променљиве.

9. $y' = cos(x + y)$.

Решење: Ако је $x + y = z(x)$ из дате једначине следи да је $z' = 1 + cos\, z$. За $z \neq (2k + 1)\pi$ интеграцијом добијамо да је $tan\dfrac{z}{2} = x + C$, па је опште решење

$$y = -x + 2\, arctan(x + C) \quad (C \in R).$$

Решења су такође и $z = (2k + 1)\pi$, односно $y = -x + (2k + 1)\pi$ и то сингуларна.

10. $y' = \dfrac{2y + x + 1}{2x + 4y + 3}$.

Решење: Сменом $x + 2y = z(x)$ добијамо једначину

$$\frac{2z + 3}{4z + 5}dz = dx \quad (z \neq -5/4),$$

па интеграцијом имамо да је

$$\frac{1}{2}z + \frac{1}{8}\, ln\,|4z + 5| = x + C \ (C \in R).$$

Како је и $z = -5/4$ решење, опште решење дате једначине је

$$4x + 8y + 5 = De^{4x-8y} \ (D \in R).$$

11. $(x - y + 1)dy = (ay - ax + 1)dx \ (a \in R)$.

Решење: Ако је $x - y = u(x)$, онда из дате једначине следи да је

$$\frac{u + 1}{u}du = (1 + a)dx,$$

па је

$$u + ln\,|u| = (a + 1)x + C \quad (C \in R).$$

Према томе, опште решења дате једначине је

$$ln\,|x - y| = ax + y + C \quad (C \in R).$$

1.2 Хомогене једначине

У задацима 12. – 26. одредити опште решење дате једначине.

12. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

Решење: За $x \neq 0$ је $y' = \dfrac{1+y/x}{1-y/x}$, па сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину

$$xu' = \frac{1+u}{1-u} - u,$$

односно

$$\frac{1-u}{1+u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интеграцијом леве и десне стране ове једначине имамо да је

$$arctan\, u - ln\sqrt{1+u^2} = ln\,|x| + C_1, \quad (C_1 \in R)$$

односно

$$e^{arctan\, x} = C_2|x|\sqrt{1+u^2} \quad (C_2 \in R^+).$$

Како је $u = y/x$, опште решење је

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{arctan\, y/x} \quad (C \in R^+).$$

Напомена: У поларним координатама опште решење је $\varrho = Ce^{\varphi}$, што значи да интегралне криве представљају фамилију логаритамских спирала.

13. $y' = \dfrac{y-x}{y}$.

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину

$$\frac{udu}{u^2-u+1} = -\frac{dx}{x}.$$

Интеграцијом леве и десне стране имамо да је

$$ln(u^2-u+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\, arctan\,\frac{2u-1}{\sqrt{3}} = -\,ln\, x^2 + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

па је опште решење

$$\sqrt{3}\, ln(x^2-xy+y^2) + 2\, arctan\,\frac{2y-x}{x\sqrt{3}} = C \quad (C \in R).$$

14. $(x-y)y' = x$.

Решење: За $x \neq y$ и $x \neq 0$ сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину која раздваја промењиве

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{u^2-u+1}du.$$

Интеграцијом налазимо да је

$$ln\,|x| = -\,ln\sqrt{u^2-u+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\, arctan\,\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

па је опште решење дате једначине

$$3\, ln\sqrt{y^2-yx+x^2} = \sqrt{3}\, arctan\,\frac{2y-x}{\sqrt{3}x} + C \quad (C \in R).$$

15. $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Решење: Сменом $y/x = u$ добијамо једначину

$$xu' = -\frac{u^3}{1+u^2} \qquad (*),$$

односно $\dfrac{1+u^2}{u^3}du = -\dfrac{dx}{x}$. Интеграцијом леве и десне стране ове једнакости имамо да је

$$ln\,|xu| = \frac{1}{2u^2} + A \quad (A \in R),$$

односно $xu = Be^{1/2u^2}$ $(B \neq 0)$. Како је и $u = 0$ решење једначине $(*)$, њено опште решење је $xu = Ce^{1/u^2}$ $(C \in R)$, а $y = Ce^{x^2/2y^2}$ опште решење дате једначине.

16. $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0.$

Решење: За $x(y-x) \neq 0$ из дате једначине добијамо да је

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{(y/x)^2}{y/x - 1}.$$

Сменом $y/x = u(x)$ имамо једначину која раздваја променљиве

$$xu' = \frac{u}{u-1}, \qquad (*)$$

односно

$$\frac{u-1}{u}du = \frac{dx}{x}$$

за $u \neq 0$. Интеграцијом леве и десне стране ове једначине имамо да је

$$ln\,|xu| = u + C_1, \quad (C_1 \in R)$$

односно $xu = C_2e^u$ $(C_2 \in R \setminus \{0\})$. Како је $u = 0$ решење једначине $(*)$, то је опште решење те једначине $xu = Ce^u$, где је $C \in R$, а $y = Ce^{y/x}$ опште решење дате једначине.

17. $y^2dx + x\left(\sqrt{y^2 - x^2} - y\right)dy = 0.$

Решење: Једначина је дефинисана за $|y| \geq |x|$, а за $x \neq 0$ је еквивалентна једначини

$$y' = \frac{y^2}{x(y - \sqrt{y^2 - x^2})}.$$

Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину која раздваја променљиве

$$\frac{dx}{x} = \frac{u - \sqrt{u^2-1}}{u\sqrt{u^2-1}}du.$$

Након интеграције леве и десне стране ове једначине имамо да је

$$ln\,|x| = ln(u + \sqrt{u^2-1}) - ln\,|u| + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$x = C_2\frac{u + \sqrt{u^2-1}}{u} \quad (C_2 \in R \setminus \{0\}).$$

Како је и $x = 0$ решење дате једначине, опште решење је

$$yx = C\left(y + sgn(x)\sqrt{y^2 - x^2}\right) \quad (C \in R).$$

18. $xy' - y = x(1 + e^{y/x}).$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину која раздваја променљиве

$$\frac{du}{1+e^u} = \frac{dx}{x}.$$

Интеграцијом имамо да је

$$ln\,\frac{e^u}{1+e^u} = ln\,|x| + C_1, \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$\frac{e^u}{1+e^u} = C|x|, \quad (C \in R^+).$$

Како је $y/x = u$, опште решење дате једначине је

$$y = |x|\,ln\,\frac{C|x|}{1-C|x|}, \quad (C \in R^+,\ C|x| < 1).$$

Напомена: Област дефинисаности функције y зависи од вредности константе C.

19. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ из дате добијамо једначину

$$u'x = \sqrt{1-u^2}, \qquad (*),$$

односно

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}, \quad u^2 \neq 1,\ x \neq 0.$$

Интеграцијом ове једначине имамо да је

$$arcsin\,u = ln\,|x| + C \quad (C \in R).$$

Како су $u = 1$ и $u = -1$ решења једначине $(*)$, то су решења дате једначине

$$y = x, \quad y = -x, \quad y = x\,sin(ln\,|x| + C).$$

20. $y' = \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 y}.$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину

$$\frac{udu}{2-u^2-u^3} = \frac{dx}{x}.$$

Како је

$$\frac{u}{2-u^2-u^3} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{u-1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{u-2}{u^2+2u+2}$$

интеграцијом се добија да је

$$-\frac{1}{5}\,ln\,|u-1| + \frac{1}{10}\,ln(u^2+2u+2) - \frac{3}{5}\,arctan(u+1) = ln\,|x| + A \quad (A \in R),$$

$$-2\,ln\,|u-1| + ln(u^2+2u+2) - 6\,arctan(u+1) = 10\,ln\,|x| + B \quad (B \in R),$$

$$ln\,\frac{u^2+u+2}{(1-u)^3 x^{10}} = C + 6\,arctan(1+u)\ (C \in R),$$

односно

$$\frac{y^2+2xy+2x^2}{(x-y)^2 x^{10}} = De^{arctan\,\frac{x+y}{x}} \quad (D \in R^+).$$

21. $(y^2 - x^2 + 2xy)dx + (y^2 - x^2 - 2xy)dy = 0.$

Решење: Дата једначина је хомогена, па сменом $u(x) = y/x$, за $u \neq 1$, добијамо једначину

$$\frac{u^2 - 2u - 1}{(1-u)(u^2+1)}du = \frac{dx}{x}.$$

Како је

$$\frac{u^2 - 2u - 1}{(1-u)(u^2+1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{2u}{u^2+1},$$

интеграцијом налазимо да је

$$ln\,|u-1| - ln(1+u^2) = ln\,|x| + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$u - 1 = Cx(u^2+1) \quad (C \in R).$$

Према томе, опште решење је $y - x = C(x^2 + y^2)$. За $u = 1$ добијамо решење $y = x$.

Напомена: Ако опште решење напишемо у облику

$$x^2 + y^2 = D(y - x) \quad (D \in R),$$

видимо да су интегралне криве кружнице које садрже координатни почетак и чији центри припадају правој $y = -x$. Партикуларно решење $y = x$ се добија за $D = \infty$.

22. $y' + \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = 0.$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину $\dfrac{u}{1+2u^2}du = -\dfrac{dx}{x}$. Интеграцијом леве и десне стране налазимо да је

$$ln(1 + 2u^2) = -4\,ln\,|x| + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно $1 + 2u^2 = C/x^4$ $(C > 0)$. Према томе, опште решење је

$$x^4 + 2x^2y^2 = C.$$

23. $xydy - y^2dx = (x+y)^2 e^{-y/x} dx.$

Решење: Сменом $y/x = u$ дата једначина се своди на једначину

$$\frac{ue^u du}{(1+u)^2} = \frac{dx}{x}. \qquad (*)$$

Како је

$$\int \frac{ue^u du}{(1+u)^2} = \int \frac{e^u(1+u) - e^u}{(1+u)^2}du = \int d\left(\frac{e^u}{1+u}\right) = \frac{e^u}{1+u},$$

то из једначине $(*)$ следи да је $\dfrac{e^u}{1+u} = ln\,|x| + C_1$ $(C_1 \in R)$, односно $\dfrac{e^u}{1+u} = ln\,C|x|$ $(C > 0)$, па је опште решење $xe^{y/x} = (x+y)\,ln\,C|x|$.

24. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ следи да је

$$u'x + u = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}+1}, \quad u'x = -\frac{u\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+u^2}+1},$$

$$\frac{\sqrt{1+u^2}+1}{u\sqrt{1+u^2}}du = -\frac{dx}{x}, \quad \frac{du}{u} + \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}.$$

Интеграцијом леве и десне стране последње једнакости налазимо да је

$$ln\, u - ln\,\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u} = -\,ln\, x + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$\frac{u^2}{1+\sqrt{1+u^2}} = \frac{C}{x}, \quad \sqrt{1+u^2} - 1 = \frac{C}{x}.$$

Према томе, опште решење је $\sqrt{x^2+y^2} = C + x$ или $y^2 = C^2 + 2Cx$.

Напомена: $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ се лако добија сменом $t = 1/u$.

25. $(e^{2x} - y^2)\, dx + y dy = 0.$

Решење: Нека је $P = (e^{2x} - y^2)\,\lambda(x)$ и $Q = y\lambda(x)$. Из услова $P'_y = Q'_x$ налазимо $\lambda(x) = e^{-2x}$. За једначину

$$\left(1 - e^{-2x}y^2\right) dx + e^{-2x} y dy = 0$$

имамо да је

$$u(x,y) = \int \left(1 - e^{-2x}y^2\right) dx + \varphi(y) = x + \frac{1}{2}y^2e^{-2x} + \varphi(y).$$

Како је $\varphi'(y) = 0$, опште решење је

$$x + \frac{1}{2}y^2e^{-2x} = C, \quad C \in R.$$

26. $\left(2x\cdot sh\dfrac{y}{x} + y\cdot ch\dfrac{y}{x}\right) dx - x\cdot ch\dfrac{y}{x} dy = 0.$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину

$$\frac{ch\ u}{sh\ u}du = 2\frac{dx}{x}$$

чије је решење $sh\ u = Cx^2$. Према томе, опште решење је $sh\dfrac{y}{x} = Cx^2$.

Свођење на хомогену

У задацима 27. − 30. решити дате диференцијалне једначине свођењем на хомогену једначину.

27. $y' = \dfrac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}.$

Решење: Сменама $x = u + \alpha$ и $y = v + \beta$, где је

$$3\beta - 7\alpha + 7 = 0, \quad -7\beta + 3\alpha - 3 = 0,$$

добијамо хомогену једначину. Дакле, за $x = u + 1$ и $y = v$ имамо једначину

$$v' = \frac{3v - 7u}{3u - 7v},$$

из које сменом $v/u = z$ добијамо једначину која раздваја променљиве

$$\frac{2dz}{z-1} + \frac{5dz}{z+1} = -7\frac{du}{u}.$$

Интеграцијом налазимо да је

$$u^7(z-1)^2(z+1)^5 = C, \quad (u-v)(u+v)^5 = C \quad (C \in R),$$

односно, враћањем променљивих x и y

$$(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = D \quad (D \in R).$$

Друго решење: Сменама $u = 3y - 7x + 7$ и $v = 3x - 7y - 3$ добијамо да је

$$\frac{du}{dv} = \frac{3dy - 7dx}{3dx - 7dy} = \frac{3y' - 7}{3 - 7y'} = \frac{3u/v - 7}{3 - 7u/v},$$

а затим сменом $u/v = z$ имамо једначину

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{3 - 7z}{z^2 - 1} dz = \frac{dv}{v}.$$

Интеграцијом леве и десне стране налазимо да је

$$2\,ln\,|z-1| + 5\,ln\,|z+1| = -7\,ln\,|v| + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$(z-1)^2|z+1|^5 = C|v|^{1/7}, \quad (u-v)^2(u+v)^5 = C \quad (C \in R),$$

одакле добијамо исто опште решење.

28. $y' = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}.$

Решење: Сменама $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где је

$$2\alpha - \beta + 1 = 0, \quad \alpha - 2\beta + 1 = 0$$

дата једначина се своди на хомогену. Дакле, за $\alpha = -1/3$ и $\beta = 1/3$ имамо једначину

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u - v}{u - 2v} \tag{$*$}$$

која се сменом $v/u = z$ своди на једначину

$$\frac{1 - 2z}{1 - z + z^2} dz = 2du\ u$$

чије је решење $u^2(1 - z + z^2) = C$ $(C \in R)$. Решење једначине $(*)$ је $u^2 - uv + v^2 = C$, а опште решење дате једначине је

$$x^2 - xy + y^2 + x - y = C \quad (C \in R).$$

Друго решење: Сменама $2x - y + 1 = u$ и $x - 2y + 1 = v$ добијамо хомогену једначину

$$\frac{du}{dv} = \frac{2v - u}{v - 2u}$$

чије је решење $u^2 - uv + v^2 = C$. Враћањем променљивих x и y и сређивањем добијамо исто опште решење.

29. $(4x + 3y + 1)dx + (x + y + 1)dy = 0.$

Решење: Сменом $x = u + 2$ и $y = v - 3$ добијамо хомогену једначину

$$v' = \frac{3v/u - 4}{v/u + 1}.$$

Ако је $v/u = z(u)$, онда из претходне једначине следи да је

$$\frac{du}{u} = -\frac{1 + z}{(2 + z)^2}dz,$$

па је

$$ln\,|u| = -\,ln\,|2 + z| - \frac{1}{2 + z} + C_1 \quad (C_1 \in R).$$

Из ове једнакости добијамо опште решење хомогене једначине

$$2u + v = Ce^{-u/(2u+v)} \quad (C \in R),$$

односно опште решење дате једначине

$$2x + y - 1 = Ce^{\frac{2 - x}{2x + y - 1}}.$$

30. $y' = -\dfrac{x - 2y + 5}{2x - y + 4}.$

Решење: Сменама $x = u + \alpha$ и $y = v + \beta$, где α и β одређујемо из услова

$$\alpha - 2\beta + 5 = 0, \quad 2\alpha - \beta + 4 = 0$$

дата једначина се своди на хомогену

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u - 2v}{2u - v}$$

чије је решење $v - u = C(v + u)^3$. Према томе, опште решење је

$$y - x + 3 = C(y + x + 1)^3 \quad (C \in R).$$

Напомена: Партикуларна решења $y = x - 3$ и $y = -x - 1$ се добијају из општег за $C = 0$ и $C = \infty$.

1.3 Линеарне једначине

31. Линеарну једначину $y' + p(x)y = q(x)$ решити сменом $q/y = z'/z$.

Решење: Датом сменом добијамо да је $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z} - pdx$, одакле следи да је

$$y = ze^{-\int p(x)dx}.$$