Вежбе из МАТЕМАТИКЕ 2

Функције више промењљивих

1. Наћи домене следећих функција: *a)* $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$; *b)* $f(x,y) = \sqrt{-x} + \sqrt{y}$;
c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$; *d)* $f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$; *e)* $f(x,y,z) = \sqrt{8 - x^2 - 2y^2 - 4z^2}$.

Резултати: *a)* $D_f = \{(x,y) : y \neq 0\}$; *b)* $D_f = \{(x,y) : x \leqslant 0, y \geqslant 0\}$; *c)* $D_f = \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 \leqslant 4\}$; *d)* $D_f = \{(x,y) : x \geqslant 0, 0 \geqslant y \leqslant x^2\}$; *e)* $D_f = \{(x,y,z) : \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{2} \leqslant 1\}$;

Гранична вредност функција две промењљиве

2. Доказати да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ако је:

$$f(x,y) = (x+y)\sin\tfrac{1}{x}\sin\tfrac{1}{y}.$$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x + 2x^2 + y + 2y^2}{x^2 + y^2} = 2.$ Доказати.

4. Доказати да не постоји $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

5. Доказати да не постоји а) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ б) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Израчунати:

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 + 2xy - 3y^2}{x^3 - y^3}$; 7. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + x - y + y^2}$; 8. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$;

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1 + x^2y^2} - 1}{x^2 + y^2}$; 10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} (1 + xy^2)^{\frac{1}{x^2 + xy}}$.

Резултати: 6. $\dfrac{4}{3}$; 7. 4; 8. 0; 9. 0; 10. e^3.

Непрекидност функција две промењљиве

Доказати да је дата функција $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

11.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

12.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

13. Доказати да функција $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има отклоњив прекид у тачки $(0,0)$.

$$f(x,y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$$

.

14. Доказати да функција $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има неотклоњив прекид у тачки $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

.

15. Доказати да функција $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има неотклоњив прекид у тачки $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x}$$

.

16. Испитати непрекидност функције $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у тачки $(0, 0)$.

$$a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x^3 + y^3) \sin \frac{1}{x^4+y^4} \cos \frac{1}{x^4+y^4}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin \frac{1}{x^2+y^2} + y^3 \cos \frac{1}{x^2+y^2}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Парцијални изводи и диференцијал

За задату функцију $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ одредити парцијалне изводе:
17. $f(x, y) = (2x^2y^2 - x + 1)^3$; 18. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

За задату функцију $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ одредити парцијалне изводе:
19. $f(x, y, z) = sin(xy + yz)$; 20. $f(x, y, z) = e^{xyz}$; 21. $f(x, y, z) = x^{y^z}$.

Резултати: 17. $f'_x = 3(2x^2y^2 - x + 1)^2(4xy^2 - 1)$, $f'_y = 12x^2y(2x^2y^2 - x + 1)^2$; 18. $f'_x = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f'_y = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$;
19. $f'_x = y \cos(xy + yz)$, $f'_y = (x + z) \cos(xy + yz)$, $f'_z = y \cos(xy + yz)$; 20. $f'_x = yze^{xyz}$, $f'_y = xze^{xyz}$, $f'_z = xye^{xyz}$;
21. $f'_x = y^z x^{(y^z - 1)}$, $f'_y = x^{y^z} y^{z-1} z \ln x$, $f'_z = x^{y^z} y^z \ln x \ln y$.

22. Доказати да функција је $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има парцијлне изводе у свакој тачки $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Резултат: $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$

23. Доказати да функција $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ нема парцијалне изводе у тачки $(0, 0)$.

24. За дату функцију одредити тотални диференцијал: $a)$ $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3$; $b)$ $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; $c)$ $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Резултат: $a)$ $df = 6(x^2 + y^2)^2(xdx + ydy)$; $b)$ $df = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $c)$ $df = \dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

Диференцијабилност

25. Доказати да је функција

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

диференцијабилна у свим тачкама равни $\mathbb{R}^2$.

26. Доказати да је дата функција $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки $(0,0)$ иако парцијални изводи у тој тачки имају прекид.

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

27. Доказати да дата функција

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

у тачки $(0,0)$ није диференцијабилна, иако има парцијалне изводе у свим тачкама.

Извод и диференцијал имплицитне функције

28. Израчунати извод функције $f:x\mapsto y$ дефинисане једначином:

$$x^2\ln y-y^2\ln x=0.$$

Резултат: $y'=\dfrac{\dfrac{y^2}{x}-2x\ln y}{\dfrac{x^2}{y}-2y\ln x}$

29. За функцију $f:(x,y)\mapsto z$ дату једначином:

$$x^2+y^2+z^2=2x$$

одредити тотални диференцијал.

Резултат: $z'_x=\dfrac{1-x}{z}; z'_y=-\dfrac{y}{z};\quad dz=\dfrac{(1-x)dx-ydy}{z}$

30. Израчунати $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$, ако је $f(x,y)=z$ дефинисана једнакошћу:

$$z^2x-x^2y+y^2z+2x-y=0.$$

Резултат: $z'_x=\dfrac{2xy-y^2-2}{2zx+y^2}; z'_y=\dfrac{x^2+1-2yz}{2zx+y^2}; z(0,1)=1, z'_x(0,1)=-3, z'_y(0,1)=-1$

31. За функцију $f:(x,y)\mapsto z$ дату једначином:

$$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz=72$$

одредити тотални диференцијал.

Резултат: $z'_x=\dfrac{y+z-5x}{5z-x-y}; z'_y=\dfrac{x+z-5y}{5z-x-y};\quad dz=\dfrac{(y+z-5x)dx+(x+z-5y)dy}{5z-x-y}$

32. За функцију $f(x,y)=z$ дату једначином:

$$x^2-2xy-3y^2+5z^2+6x+2y=0$$

одредити тотални диференцијал.

Резултат: $z'_x=\dfrac{y-x-3}{5z}; z'_y=\dfrac{x+3y-1}{5z};\quad dz=\dfrac{(y-x-3)dx+(x+3y-1)dy}{5z}$

33. За функцију $f(x,y)=z$ дату једначином:

$$xy^2+xz^2-yz^2-x+2y+z-3=0$$

одредити тотални диференцијал.

Резултат: $z'_x=\dfrac{1-y^2-z^2}{2xz-2yz+1}; z'_y=\dfrac{z^2-2xy-2}{2xz-2yz+1};\quad dz=\dfrac{(1-y^2-z^2)dx+(z^2-2xy-2)dy}{2xz-2yz+1}$

Парцијални изводи вишег реда и диференцијали вишег реда

34. За функцију $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ одредити парцијалне изводе другог реда.

Резултат: $f'_x=\dfrac{1}{1+x^2}; f'_y=\dfrac{1}{1+y^2}; f''_{xx}=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}; f''_{xy}=f''_{yx}=0; f''_{yy}=\dfrac{-2y}{(1+y^2)^2}$

35. За функцију $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ одредити парцијалне изводе другог реда.

Резултат: $f'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; f'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; f'_z=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; f''_{xx}=\dfrac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; f''_{yy}=\dfrac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$
$f''_{zz}=\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; f''_{xy}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; f''_{yz}=-\dfrac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; f''_{xz}=-\dfrac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

36. Одредити парцијалне изводе вишег реда функције $f(x,y)=z$ задате једнакошћу (парцијалне изводе првог реда ове функције израчунали смо у задатку 31):

$$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz=72.$$

Резултат: $z'_x=\dfrac{y+z-5x}{5z-x-y}; z'_y=\dfrac{x+z-5y}{5z-x-y};$
$z''_{xx}=\dfrac{-5+2z'_x-5(z'_x)^2}{5z-x-y}; z''_{xy}=\dfrac{1+z'_x+z'_y-5z'_xz'_y}{5z-x-y};$
$z''_{yy}=\dfrac{-5+2z'_y-5(z'_y)^2}{5z-x-y}$

37. За функцију $f(x,y,z)=2x^3-3y^3+x^2yz-z^2+xyz$ одредити d^2f.

Резултат: $f'_x=6x^2+2xyz+yz; f'_y=-9y^2+x^2z+xz; f'_z=x^2y-2z+xy;$
$f''_{xx}=12x+2yz; f''_{yy}=-18y; f''_{zz}=-2; f''_{xy}=2xz+z; f''_{xz}=2xy+y; f''_{yz}=x^2+x;$
$d^2f=(12x+2yz)dx^2-18ydy^2-2dz^2+2((2xz+z)dxdy+(2xy+y)dxdz+(x^2+x)dydz)$

Тејлорова формула. Маклоренова формула.

38. Одредити Тејлоров полином другог степена који апроксимира дату функцију $f(x,y)=e^{x+y}(2x+y)$ у околини тачке $A(1,1)$.

Резултат: $f'_x=e^{x+y}(2x+y+2); f'_y=e^{x+y}(2x+y+1);\quad f''_{x^2}=e^{x+y}(2x+y+4); f''_{xy}=e^{x+y}(2x+y+3);$
$f''_{y^2}=e^{x+y}(2x+y+2);\quad f(1,1)=3e^2; f'_x(1,1)=5e^2; f'_y(1,1)=4e^2; f''_{x^2}(1,1)=7e^2; f''_{xy}(1,1)=6e^2; f''_{y^2}(1,1)=5e^2;$
$T_2(x,y)=e^2(3+5(x-1)+4(y-1)+\dfrac{7}{2}(x-1)^2+6(x-1)(y-1)+\dfrac{5}{2}(y-1)^2)$

39. Функцију $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ апроксимирати Маклореновим полиномом четвртог степена.

Резултат: $T_4(x,y)=1-\dfrac{x^2+y^2}{2}-\dfrac{(x^2+y^2)^2}{8}$

40. Одредити Тејлоров полином другог степена којим се функција $f(x,y)=z$ дефинисана једнакошћу

$$x^2+y^2-z^2-xyz=0,\ z>0$$

апроксимира у околини тачке $A(-1,0)$.

Резултат:$z'_x=\dfrac{2x-yz}{2z+xy}; z'_y=\dfrac{2y-xz}{2z+xy};\quad z''_{x^2}=\dfrac{2(1-yz'_x-(z'_x)^2)}{2z+xy}; z''_{y^2}=\dfrac{2(1-xz'_y-(z'_y)^2)}{2z+xy}; z''_{xy}=\dfrac{2z'_xz'_y-xz'_x-yz'_y-z}{2z+xy};$
$z(0,1)=1; z'_x(-1,0)=-1; z'_y(-1,0)=\dfrac{1}{2};\quad z''_{x^2}(-1,0)=0; z''_{y^2}(-1,0)=\dfrac{5}{4}; z''_{xy}(-1,0)=-\dfrac{1}{2};$
$T_2(x,y)=1-(x+1)+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}(x+1)y+\dfrac{5}{8}y^2$

41.(I колоквијум 2009) Написати Маклоренов полином другог степена којим се апроксимира функција $f(x,y)=z$ задата једначином:

$$z^3+z^2x-x^2-y^2-2y-1=0.$$

Резултат: $z'_x=\dfrac{2x-z^2}{3z^2+2zx}; z'_y=\dfrac{2y+2}{3z^2+2zx};$
$z''_{x^2}=\dfrac{2(1-2zz'_x-x(z'_x)^2-3z(z'_x)^2)}{3z^2+2zx}; z''_{y^2}=\dfrac{2(1-xz'_y-3z(z'_y)^2)}{3z^2+2zx}; z''_{xy}=\dfrac{-2(zz'_y+xz'_xz'_y+3zz'_xz'_y)}{3z^2+2zx};$
$z(0,0)=1; z'_x(0,0)=-\dfrac{1}{3}; z'_y(0,0)=\dfrac{2}{3};\quad z''_{x^2}(0,0)=\dfrac{4}{3}; z''_{y^2}(0,0)=-\dfrac{2}{9}; z''_{xy}(0,0)=0;$
$T_2(x,y)=1-\dfrac{x}{3}+\dfrac{2y}{3}+\dfrac{2x^2}{3}-\dfrac{y^2}{9}$

42.(септембар 2009) Написати Тејлоров полином другог степена који у околини тачке $A(0,1)$ апроксимира функцију $f(x,y)=z$ задату једначином:

$$e^{xy}+xz-2yz+z^2=4,\ z<0.$$

Резултат: $z'_x=\dfrac{-z-ye^{xy}}{x-2y+2z}; z'_y=\dfrac{2z-xe^{xy}}{x-2y+2z};$
$z''_{x^2}=\dfrac{-2z'_x-y^2e^{xy}-2(z'_x)^2}{x-2y+2z}; z''_{y^2}=\dfrac{4z'_y-x^2e^{xy}-2(z'_y)^2}{x-2y+2z}; z''_{xy}=\dfrac{-(1+xy)e^{xy}+2z'_x-z'_y-2z'_xz'_y}{x-2y+2z};$
$z(0,1)=-1; z'_x(0,1)=0; z'_y(0,1)=\dfrac{1}{2}; z''_{x^2}(0,1)=\dfrac{1}{4}; z''_{y^2}(0,1)=-\dfrac{3}{8}; z''_{xy}(0,1)=\dfrac{3}{8};$
$T_2(x,y)=-1+\dfrac{1}{2}(y-1)+\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{3}{8}x(y-1)-\dfrac{3}{16}(y-1)^2$

Локални екстремуми функције две променљиве

43. За функцију $f(x,y)=2-\sqrt[3]{x^2+y^2}$ одредити све локалне екстремуме.

Резултат: $f_{max}=f(0,0)=2$

44. За функцију $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$ одредити све локалне екстремуме.

Резултат:
Стационарне тачке функције су: $S_1(0,0); S_2(0,1); S_3(0,-1); S_4(1,0); S_5(-1,0)$
$f_{min}=f(0,0)=0; f_{max}=f(0,1)=f(0,-1)=2e^{-1}$

45. Одредити све локалне екстремуме функције $f(x,y)=z$ која је дата једначином:

$$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz=72.$$

Резултат: $f_{max}=f(1,1)=4; f_{min}=f(-1,-1)=-4$

46. Доказати да функција $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ нема у тачки $(0,0)$ локални екстремум.

47.(јануар 2010) Одредити све екстремуме функцију $f(x,y)=\ln(x^2y)+\dfrac{3}{x}-y+x-\dfrac{2}{y}$.

48.(јун 2008) Одредити све локалне екстремуме функције $f(x,y)=z$ која је дата једначином:

$$z^2+x^2+2y^2+2yz+4x+3z+4=0,\ y>0$$

49.(I колоквијум 2009) Одредити све локалне екстремуме функције $f(x,y)=z$ која је дата једначином:

$$3xz+yz-\ln 3xy=2.$$

Резултат: $f_{min}=f(-\dfrac{1}{3},-1)=-1; f_{max}=f(\dfrac{1}{3},1)=1$

Локални екстремуми функције три промењиве

50. За дату функцију $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subseteq \mathbf{R}^3$, одредити све локалне екстремуме.

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^3 + 6y^2 + 2z^2 + 2xz.$$

51. За дату функцију $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subseteq \mathbf{R}^3$, одредити све локалне екстремуме.

$$f(x,y,z) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}.$$

52.(октобар 2009) Одредити екстремне вредности функције:

$$f(x,y,z) = e^{-x}(-y^2 - z^2 + 2xz),\ x \neq 0,\ z \neq 0.$$

53.(јун 2006) Одредити локалне екстремуме функције:

$$f(x,y,z) = 2y^2 - 4z + \frac{x^2}{y}.$$

54.(април 2008) Одредити локалне екстремуме функције:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z} + 4x + 2y + z + z^2.$$

Условни екстремуми функције две промењиве

55. Одредити све екстремне вредности функције

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

при услову $x + y = 1$.

56. Одредити све екстремне вредности функције

$$f(x,y) = xy,$$

при услову $x^2 + y^2 = 2$.

57.(I колоквијум 2008) Одредити све екстремне вредности функције

$$f(x,y) = 2x^2 + 12xy - 3y^2,\ (x, y > 0)$$

при услову $x^2 + y^2 = 13$.

58.(I колоквијум 2008) Одредити све екстремне вредности функције

$$f(x,y) = x^2 + y^2,\ (x, y > 0)$$

при услову $xy = x + y$.

Условни екстремуми функције три промењиве

59. Одредити све локалне екстремуме функције

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2,$$

при услову $x + y + z = 1$.

60. Одредити све локалне екстремуме функције

$$f(x, y, z) = x + y + z,$$

при услову $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

61. (октобар 2008) Одредити све локалне екстремуме функције

$$f(x, y, z) = x - 2y + 5z,$$

при услову $x^2 + y^2 + 5z^2 = 10$.

Највећа и најмања вредност функције

62. Одредити највећу и најмању вредности функције $f(x, y) = x^2 - y^2$ на скупу $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

63. Одредити највећу и најмању вредности функције

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$$

на скупу $D = \{(x, y) : x - 4 \leqslant -|y - 1|, x \geqslant 0\}$.

64. Одредити највећу и најмању вредности функције

$$f(x, y) = x^2 y \ln x$$

на скупу $D = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant e, 1 \leqslant y \leqslant x^2\}$.

65. (јун 2008) Одредити највећу и најмању вредности функције

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2x + 1 + y^2$$

на троугаоној области D чија су темена $A(-2, -2)$, $B(2, 0)$ и $C(2, 2)$.

66. (јун 2009) Одредити највећу и најмању вредности функције

$$f(x, y) = e^{xy - 2x - y}$$

на троугаоној области D чија су темена $A(0, 0)$, $B(5, 0)$ и $C(0, 5)$.

67. (септембар 2009) Одредити највећу и најмању вредности функције

$$f(x, y) = 8xy - x^2 - y^2 - 8x + 2y$$

на области $D = \{(x, y) : -2 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$.

68. (I колоквијум 2012) Одредити најмању и највећу вредности функције

$$f(x, y) = 4x^2 + (y - 3)^2 + 2$$

на области $D = \{(x, y) : x^2 \leqslant y \leqslant 9\}$.