др Милица Стојановић
др Оливера Михић

МАТЕМАТИКА 2

- измене -

Факултет организационих наука

Б Е О Г Р А Д 2013.

4.3 Условни екстремуми функције више промењљивих

....

Довољни услови за условни екстремум

Означимо са $(P,\lambda_0) = (x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2,\dots,x_n^0+\Delta x_n,\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0)$ тачку која припада околини тачке $(P_0,\lambda_0)=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0)$. При томе можемо сматрати да су прираштаји по проманљивим λ_i, $i\in\{1,2,\dots,m\}$, једнаки нули, тј. $\Delta\lambda_i=0$. Тада важи и $d\lambda_i=0$, па код прираштаја и диференцијала функције L варирају само промењљиве x_j, $j\in\{1,2,\dots,n\}$. Означимо са $\Delta_X L(P_0,\lambda_0) = L(P,\lambda_0)-L(P_0,\lambda_0)$ прираштај функције L по промењљивим x_j, а са $d_X L(P_0,\lambda_0)=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial L(P_0,\lambda_0)}{\partial x_j}dx_j$, $d_X^2 L(P_0,\lambda_0)=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial^2 L(P_0,\lambda_0)}{\partial x_j\partial x_k}dx_j dx_k$ одговарајуће диференцијале првог и другог реда те функције. Тада важе следећа тврђења.

Теорема 4.3.11. Нека функције $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $g_1(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $g_2(x_1,x_2,\dots,x_n)$, ..., $g_m(x_1,x_2,\dots,x_n)$ имају непрекидне парцијалне изводе другог реда у околини тачке $P_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ такве да је $(P_0,\lambda_0)=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\dots,\lambda_m^0)$ стационарна тачка Лагранжове функције, и нека је $\operatorname{rang}\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{m\times n}=m$. Ако је

- $d_X^2L(P_0,\lambda_0)$ позитивно дефинисана, онда је тачка P_0 условни строги минимум функције $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, при условима $g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$, $i\in\{1,\dots,m\}$,
- $d_X^2L(P_0,\lambda_0)$ негативно дефинисана, онда је тачка P_0 условни строги максимум функције $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, при условима $g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$, $i\in\{1,\dots,m\}$.

Доказ. Нека функција $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ са условима $g_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$, $g_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$, ..., $g_m(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ $(m<n)$ има условни екстремум у тачки $P_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$, при чему су испуњени услови теореме. Нека је, осим тога, $P(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\dots,x_n^0+\Delta x_n)$ таква тачка да су за њу испуњени услови $g_1(P)=0$, $g_2(P)=0$, ... , $g_n(P)=0$. Тада је

$$\Delta f(P_0)=f(P)-f(P_0)=$$

$$= f(P) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(P) - f(P_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(P_0) = \Delta_X L(P_0, \lambda_0),$$

Ако функције $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ имају непрекидне друге парцијалне изводе, на основу Тејлоровог полинома важи $\Delta_X L(P_0, \lambda_0) = d_X L(P_0, \lambda_0) + \frac{1}{2} d_X^2 L(P_0, \lambda_0) + o(\rho^2)$, где је $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$, а $d\lambda_i (= \Delta\lambda_i) = 0$. При томе је $dL(P_0, \lambda_0) = 0$ због претпоставке да је (P_0, λ_0) стационарна тачка Лагранжове функције, па важи и $d_X L(P_0, \lambda_0) = 0$. Зато је знак $\Delta_X L(P_0, \lambda_0)$ и $d_X^2 L(P_0, \lambda_0)$ исти, из чега следи тврђење. □

Често $d_X^2 L(P_0, \lambda_0)$ није дефинисаног знака, па тада на основу претходн теореме не знамо да ли је P_0 тачка екстремума. Зато нам је потребна следећа, строжија теорема о довољним условима за условни екстремум функције више променљивих, која је доказана у додатку.

Теорема 4.3.12. Нека функције $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ..., $g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имају непрекидне парцијалне изводе другог реда у околини тачке $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ такве да је $(P_0, \lambda_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0)$, за неке вредности $\lambda_i = \lambda_i^0$, $i = \{1, \ldots, m\}$ стационарна тачка Лагранжове функције

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

и нека је ранг Јакобијеве матрице

$$\operatorname{rang} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{m \times n} = m.$$

Тада је довољан услов да тачка P_0 буде тачка условног екстремума функције $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, да за све $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ који задовољавају

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(P_0) dx_1 + \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(P_0) dx_2 + \ldots + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(P_0) dx_n = 0, \ i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

квадратна форма

$$Q = d^2 L_X(P_0, \lambda_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(P_0, \lambda_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

буде дефинисаног знака.

Прецизније, ако је $Q > 0$ онда је P_0 тачка условог минимума, ако је $Q < 0$ онда је P_0 тачка условног максимума, а ако Q узима вредности различитог знака, онда P_0 није тачка екстремума.