

2 Одређивање аналитичке функције

.....

Одредити аналитичку функцију $f : x + iy \mapsto u + iv$ на основу датих података о њеном реалном делу и изразити $f(z)$ експлицитно помоћу аргумента z .

2.1. $u(x, y) = -2xy - 2y, f(0) = i$

2.2. $u(x, y) = x^2 - y^2 - x, f(0) = i$

2.3. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0$

2.4. $u(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$

2.5. $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 1, f(0) = 1$

2.6. $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2y, f(0) = 0$

2.7. $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2y - 1$

2.8. $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2y, f(0) = -1$

2.9. $u(x, y) = x^3 - 3xy + 1, f(0) = 1$

2.10. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x, f(0) = 0$

2.11. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i$

2.12. $u(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$

2.13. $u(x, y) = \frac{y - x}{x^2 + y^2}$

2.14. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + x, f(1) = 2$

2.15. $u(x, y) = x^2 - y^2 - x + \frac{x}{x^2 + y^2}, f(1) = 1$

2.16. $u(x, y) = \frac{y + 1}{x^2 + (y + 1)^2}$

2.17. $u(x, y) = \frac{x + 1}{y^2 + (x + 1)^2}, f(0) = 1$

2.18. $u(x, y) = \frac{y + 2}{x^2 + y^2 + 4y + 4}$

2.19. $u(x, y) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}, f(0) = 2$

2.20. $u(x, y) = e^{-y} \cos x, f(0) = 1$

2.21. $u(x, y) = 1 - e^x \sin y, f(0) = 1 + i$

2.22. $u(x, y) = e^{-y} \cos x + x, f(0) = 1$

2.23. $u(x, y) = e^{-y} \cos x - e^x \sin y$

2.24. $u(x, y) = e^{-y} \cos x - e^{-x} \sin y$

- 2.25. $u(x, y) = e^{2x}(x \cos 2y - y \sin 2y)$
2.26. $u(x, y) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x)$
2.27. $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$, $f(0) = 0$
2.28. $u(x, y) = e^x(x \cos y - (y + 1) \sin y)$, $f(0) = i$
2.29. $u(x, y) = e^{x-y} \cos(x + y) + e^{x+y} \cos(x - y)$
-

- 2.30. $u(x, y) = \cosh 2y \cdot \cos 2x$, $f(0) = 1 + i$
2.31. $u(x, y) = \sin 3x \cdot \cosh 3y$, $f(0) = i$
2.32. $u(x, y) = -\sin 3y \cdot \cosh 3x$
2.33. $u(x, y) = (\cosh y - \sinh y) \cos x$
2.34. $u(x, y) = -\sin y \cdot \cosh x$, $f(0) = i$
2.35. $u(x, y) = \cosh(x + 1) \cos(y - 1)$
2.36. $u(x, y) = x \sinh x \cos y - y \cosh x \sin y$, $f(0) = 0$
2.37. $u(x, y) = x \sin x \cosh y - y \cos x \sinh y$
2.38. $u(x, y) = e^x[(x^2 - y^2) \cos y + 2(1 - xy) \sin y]$
2.39. $u(x, y) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cosh 2y}$
2.40. $u(x, y) = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y}$

.....

Одредити аналитичку функцију $f : x + iy \mapsto u + iv$ на основу датих података о њеном имагинарном делу и изразити $f(z)$ експлицитно помоћу аргумента z .

2.41. $v(x, y) = 2xy + 2x, f(0) = 0$

2.42. $v(x, y) = 2xy - 2y, f(0) = 1$

2.43. $v(x, y) = 2xy + y, f(0) = 0$

2.44. $v(x, y) = x^2 - y^2 - x, f(0) = 0$

2.45. $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = i$

2.46. $v(x, y) = 3x^2y - y^3, f(0) = 1$

2.47. $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - y, f(0) = 0$

2.48. $v(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i$

2.49. $v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 2$

2.50. $v(x, y) = 2xy - y - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 1$

2.51. $v(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$

2.52. $v(x, y) = \frac{y}{(x + 1)^2 + y^2}, f(0) = 1$

2.53. $v(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$

2.54. $v(x, y) = \frac{x - y - 1}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$

2.55. $v(x, y) = \frac{y - 3}{x^2 + y^2 - 6x + 9}, f(1 + 3i) = i$

2.56. $v(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2 - 2y}$

2.57. $v(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

2.58. $v(x, y) = e^{-y} \sin x, f(0) = 1$

2.59. $v(x, y) = e^{-y} \sin x + y, f(0) = 1$

2.60. $v(x, y) = e^x \cos x, f(0) = 1 + i$

2.61. $v(x, y) = e^x (y \cos y + x \sin y), f(0) = 0$

2.62. $v(x, y) = e^{-x} \cos y - e^{-y} \sin x$

2.63. $v(x, y) = e^x (-x \cos y + y \sin y)$

2.64. $v(x, y) = (x \cos y - y \sin y)e^x$

2.65. $v(x, y) = (y \cos 3x + x \sin 3x)e^{-3y}$

$$2.66. v(x, y) = [2xy \cos 2y + (x^2 - y^2) \sin 2y]e^{2x}$$

$$2.67. v(x, y) = e^{2x}((x - 1) \sin 2y + y \cos 2y)$$

$$2.68. v(x, y) = e^{2xy} \sin(y^2 - x^2)$$

$$2.69. v(x, y) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y, f(0) = 2$$

$$2.70. v(x, y) = \sin x(\cosh y - \sinh y), f(0) = 0$$

$$2.71. v(x, y) = \sinh 2x \cdot \sin 2y$$

$$2.72. v(x, y) = -\sin 2y \cdot \sinh 2x$$

$$2.73. v(x, y) = \cos 3x \cdot \sinh 3y, f(0) = 2$$

$$2.74. v(x, y) = e^x \sin y + \cos x \cdot \sinh y, f(0) = 0$$

$$2.75. v(x, y) = \arctan \frac{y - 1}{x + 1}$$

$$2.76. v(x, y) = \ln((x - 1)^2 + (y - 2)^2)$$

.....

2.77. Одредити све реалне функције α и β за које је функција

$$f : x + iy \mapsto \alpha(x)(x \cos y - y \sin y) + i\beta(x)(x \sin y + y \cos y)$$

аналитичка на \mathbb{C} .

2.78. Одредити све реалне функције α и β за које је функција $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$, где је

$$u(x, y) = (\cos x + \sin x)\alpha(y), \quad v(x, y) = (\cos x - \sin x)\beta(y),$$

аналитичка на \mathbb{C} .

2.79. Одредити све реалне функције α и β за које је функција

$$f : x + iy \mapsto \alpha(x)(e^{2y} + e^{-2y}) + i\beta(x)(e^{2y} - e^{-2y})$$

аналитичка на \mathbb{C} .

2.80. Одредити константе α , β , γ и δ тако да функција $f : x + iy \mapsto u + iv$ дефинисана са

$$u = x^2 + \alpha xy + \beta y^2, \quad v = \gamma x^2 + \delta xy + y^2$$

буде аналитичка, а затим израчунати $\int_L f(z)dz$, где је L дуж AB чији су крајеви тачке $A = 1$ и $B = i$.

.....

2.81. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$, и израчунати $\int_i^1 f(z)dz$, ако је $u(x, y) = -\sin 3y \cosh 3x$.

2.82. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ и израчунати $\int_i^1 f(z)dz$, ако је $v(x, y) = -\sin 2y \sinh 2x$.

2.83. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ и израчунати $\int_0^\pi f(z)dz$ ако је $u(x, y) = (\cosh y - \sinh y) \cos x$.

2.84. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ ако је

$$v(x, y) = [2xy \cos 2y + (x^2 - y^2) \sin 2y]e^{2x},$$

а затим израчунати $\int f(z)dz$.

2.85. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ ако је

$$u(x, y) = e^{x-y} \cos(x+y) + e^{x+y} \cos(x-y),$$

а затим израчунати $\int f(z)dz$.

2.86. Одредити аналитичку функцију $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ за коју је $f(0) = 0$ и $v(x, y) = \sinh 2x \cdot \sin 2y$, а затим израчунати $\int_L f(z)dz$, где је L крива која спаја тачке $z_1 = -\pi/4$ и $z_2 = \pi/4$.

2.87. Одредити аналитичку функцију $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ ако је $v(x, y) = 2xy + 2x$ и $f(0) = 0$, а затим израчунати $\int_{C^+} f(z)dz$, где је $C = \{z : |z + i| = 1\}$.

2.88. Одредити аналитичку функцију $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ ако је $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2y - 1$ и $f(0) = -1$, а затим израчунати $\int_{C^+} f(z)dz$, где је $C = \{z : |z - i| = 1\}$.

2.89. Дата је ϕ -ја $f(z) = \begin{cases} z^2/\bar{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$.

1. Испитати да ли у тачки $z = 0$ важе Коши-Риманови услови.

2. Израчунати $\int_{C^+} f(z)dz$ ако је $C = \{z : |z| = r\}$, $r \neq 0$.

2.90. Израчунати $\int_C f(z)dz$ ако је $f : z \mapsto u + iv$ аналитичка функција за коју је $f(0) = i$ и ако је

$$u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y), \quad C = \{z : z = \sin t + it, t \in [0, \pi]\}.$$

2.91. Израчунати $\int_L f(z)dz$, где је $f : x + iy \mapsto u + iv$ аналитичка функција за коју је

$$u(x, y) = x \sin x \cosh y - y \cos x \sinh y$$

и где је L дуж AB , при чему је $A = 0$ и $B = i$.

2.92. Одредити константе α , β , γ и δ тако да функција $f : x + iy \rightarrow u + iv$ дефинисана са

$$u = x^2 + \alpha xy + \beta y^2, \quad v = \gamma x^2 + \delta xy + y^2$$

буде аналитичка, а затим израчунати $\int_L f(z) dz$, где је L дуж AB чији су крајеви тачке $A = 1$ и $B = i$.

4 Примена резидуума у израчунавању интеграла ФКП

Ако је једноструко повезана област D ограничена контуром C и ако је f аналитичка функција на D и C , осим у коначно много тачака z_1, z_2, \dots, z_n које припадају области D , тада је

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Израчунати $\int_{C^+} f(z)dz$ за дату функцију f и дату контуру C .

4.1. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re}(z)$, $C = \{z : |z| = 1\}$.

4.2. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$, $C = \{z : |z| = 3\}$.

4.3. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$, $C = \{z : |z| = 3\}$.

4.4. $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 5}$, $C = \{z : |z| = 3\}$.

4.5. $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.

4.6. $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$, $C = \{z : |z| = 1/2\}$.

4.7. $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.

4.8. $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $C = \{z : |z| = 4\}$.

4.9. $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, $C = \{z : |z-1| = 1\}$.

4.10. $f(z) = \frac{1}{z^4 - 1}$, C - правоугаоник са теменима $2+2i$, $-2+2i$, $2-i/2$ и $-2-i/2$.

4.11. $f(z) = \frac{z^3}{2z^4 + 1}$, $C = \{z : |z| = 1\}$.

4.12. $f(z) = \frac{z^3}{z^4 - 1}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.

4.13. $f(z) = \frac{1}{z^3(z^{10} - 2)}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.

4.14. $f(z) = \frac{1}{(z+3)(z^{15} - 1)}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.

4.15. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$, $C = \{z : |z-2| = \frac{1}{2}\}$.

- 4.16. $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)^2}$, $C = \{z : |z-3| = \frac{1}{2}\}$.
- 4.17. $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.
- 4.18. $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2(1-\bar{z})(4-\bar{z})}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.
- 4.19. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(z+1)}$, $C = \{z : |z+1+i| = \sqrt{2}\}$.
- 4.20. $f(z) = \frac{1}{z^5+z^4+z^3}$, $C = \{z : |z| = \pi/4\}$.
- 4.21. $f(z) = \frac{z+2i}{z^2(z^2+1)}$, $C = \{z : |z-i/2| = 1\}$.
- 4.22. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(z-1)}$, $C = \{z : |z-1-i| = \sqrt{2}\}$.
- 4.23. $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.
- 4.24. $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, $C : |z| < 2, \text{Im}z > 0$.
- 4.25. $f(z) = \frac{z-1}{z^5+2z^3+z}$, $C = \{z : |z-i| = 3/2\}$.
- 4.26. $f(z) = \frac{z+1}{z^5-2z^3+z}$, $C = \{z : |z-1| = 3/2\}$.
- 4.27. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$, $C = \{z : |z-1-i| = \sqrt{2}\}$.
- 4.28. $f(z) = \frac{1}{z^5-2z^4+2z^3}$, $C = \{z : |z-i| = \sqrt{2}\}$.
- 4.29. $f(z) = \frac{z+1}{(z+2i)^2(z-1)}$, $C = \{z : |z| = 3\}$.
- 4.30. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$, $C = \{z : |z-1| = 1\}$.
- 4.31. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$, $C = \{z : |z+2| = 1\}$.
- 4.32. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$, $C = \{z : |z| = 3\}$.
- 4.33. $f(z) = \frac{1}{z^5-z^3}$, $C = \{z : |z-1| = \sqrt{2}\}$.
- 4.34. $f(z) = \frac{1}{z^5-z^3}$, $C = \{z : |z+1| = \sqrt{2}\}$.

- 4.35. $f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$, $C = \{z : |z| = 1\}$.
- 4.36. $f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$, $C = \{z : |z| = 3\}$.
- 4.37. $f(z) = \frac{1}{(z+1)^3(z-1)^2}$, $C = \{z : |z+1| = 1\}$.
- 4.38. $f(z) = \frac{1}{(z+1)^3(z-1)^2}$, $C = \{z : |z-1| = 1\}$.
- 4.39. $f(z) = \frac{1}{(z+1)^3(z-1)^2}$, $C = \{z : |z| = 3\}$.
- 4.40. $f(z) = \frac{1}{(25z^2+1)^4}$, $C = \{z : |z-i| = 1\}$.
- 4.41. $f(z) = \frac{z^6+5z^3}{z^4+16}$, $C = \{z : |z| = 4\}$.
- 4.42. $f(z) = \frac{(2z-1)}{(z-1)^2(4z^2-4z+37)}$, $C = \{z : |z-3i| = 1\}$.
- 4.43. $f(z) = \frac{z^4}{z^2+z-2}$, $C = \{z : |z| = 3\}$.
- 4.44. $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-7z+12)}$, $C = \{z : |z+i| = 2\}$.
- 4.45. $f(z) = \frac{z^2-1}{(z+1)^3(z-2)}$, $C = \{z : |z-2| = 1\}$.
- 4.46. $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+2az+1}$, $C = \{z : |z/a| = 2, a \in \mathbb{R}, |a| > 1\}$.
- 4.47. $f(z) = \frac{z^4+1}{z^2(\bar{z}-a)(b-\bar{z})}$, $C = \{z : |z| = r, 0 < |a| < r < |b|\}$.
-
- 4.48. $f(z) = \frac{e^{2iz}-1}{z^3}$, $C = \{z : |z| = 1\}$.
- 4.49. $f(z) = \frac{e^z}{1+e^{\pi z}}$, $C = \{z : |z| = \pi\}$.
- 4.50. $f(z) = \frac{z+1}{e^z+1}$, $C = \{z : |z| = 4\}$.
- 4.51. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$, $C = \{z : |z+2i| = 3\}$.
- 4.52. $f(z) = \frac{e^z-1}{z(z^2+9)}$, $C = \{z : |z+2+2i| = \pi\}$.

- 4.53. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2 - 9)}$, $C = \{z : |z| = 1\}$.
- 4.54. $f(z) = \frac{e^{2z}}{1 + e^z}$, $C = \{z : |z| = 5\}$.
- 4.55. $f(z) = \frac{e^{2z}}{e^z(e^z + 1)}$, $C = \{z : |z - 2i| = 3\}$.
- 4.56. $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^6 - z^2}$, $C = \{z : |2z - i| = 2\}$.
- 4.57. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z - 1)}$, $C = \{z : |z + i| = 2\}$.
- 4.58. $f(z) = \frac{1}{z(1 - e^{2z})}$, $C = \{z : |z| = 3\pi/2\}$.
- 4.59. $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^3 + z)^2}$, $C = \{z : |z + i| = 3/2\}$.
- 4.60. $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z(z - i)^3}$, $C = \{z : |z| = \sqrt{2}\}$.
- 4.61. $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z - 1)}$, $C = \{z : |z - 2| = 3\}$.
- 4.62. $f(z) = \frac{e^{\pi z/2}}{z^4 + 4z^2}$, $C = \{z : |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 2\}$.
- 4.63. $f(z) = \frac{e^{\pi z/2}}{z^2(z^2 - 2z + 2)}$, $C = \{z : |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z - 1| = 2\}$.
- 4.64. $f(z) = \frac{e^{\pi z/2}}{4z^2 + z^4}$, $C = \{z : |z| = \pi\}$.
- 4.65. $f(z) = \frac{e^{\pi z/2}}{z^4 + 9z^2}$, $C = \{z : |z - 2i| = 3\}$.
- 4.66. $f(z) = \frac{e^z}{z^4 + z^2}$, $C = \{z : |z + i| = 3/2\}$.
- 4.67. $f(z) = \frac{e^z}{z^3 - z^2 - z + 1}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.
- 4.68. $f(z) = \frac{e^z}{z^4 - 1}$, $C = \{z : |z - 1 - i| = \sqrt{2}\}$.
- 4.69. $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2}$, $C = \{z : |z - i| = 3/2\}$.
- 4.70. $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^4 + z^2}$, $C = \{z : |2z + i| = 2\}$.

- 4.71. $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^6 - z^2}$, $C = \{z : |2z - i| = 2\}$.
- 4.72. $f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + 4)^2}$, $C = \{z : |z + 2i| = 3\}$.
- 4.73. $f(z) = \frac{e^z}{z(1 - z)^3}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.
- 4.74. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z^2 + 4)^2}$, $C = \{z : |z - i| = \sqrt{2}\}$.
- 4.75. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z^2 + 1)^2}$, C не садржи тачке 0 , $-i$ и i .
- 4.76. $f(z) = \frac{e^z - 1}{(z^2 - z)^2}$, $C = \{z : |z| = 3/2\}$.
- 4.77. $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2(z^2 + 2z + 2)}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.
- 4.78. $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2(2z^2 - 3iz + 2)}$, $C = \{z : |z| = 1\}$.
- 4.79. $f(z) = \frac{1}{z(1 - e^{2z})}$, $C = \{z : |z| = 3\pi/2\}$.
- 4.80. $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z^2 - 1)}$, $C = \{z : |z + 1| = \sqrt{2}\}$.
- 4.81. $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z^2 - 1)}$, $C = \{z : |z + 1| = \sqrt{3}\}$.
- 4.82. $f(z) = z^4 e^{1/z}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.
- 4.83. $f(z) = z e^{1/(z-1)}$, $C = \{z : |z - i| = 1\}$.
- 4.84. $f(z) = \frac{z - \frac{1}{\ln 2}}{e^{1/z} - 2}$, $C = \{z : |z| = 1\}$.
- 4.85. $f(z) = \frac{z^2}{e^{iz} + i}$, $C = \{z : |z| = 6\}$.
- 4.86. $f(z) = \frac{1}{(z - 1)^2(1 - e^{2z})}$, $C = \{z : |z| = 3\}$.
- 4.87. $f(z) = \frac{z^2}{z - 1} e^{1/(z-1)}$, $C = \{z : |z| = 2\}$.
- 4.88. $f(z) = \frac{e^{az}}{z^2(z^2 + 2z + 2)}$, $C = \{z : |z - i| = \sqrt{2} + \sqrt{3}\}$.
- 4.89. $f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2}$, $C = \{z : |z| = \sqrt{\pi^2 + 2\pi}\}$.

$$4.90. f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + 2z}, \quad C = \{z : |z| = 3\}.$$

$$4.91. f(z) = \frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}, \quad C = \{z : |z| = 4\}.$$

$$4.92. f(z) = \frac{z^3 e^{1/z}}{1-z^2}, \quad C = \{z : |z - 1/2| = 1\}.$$

$$4.93. f(z) = \frac{1}{3+iz} e^{4i/(z-i)}, \quad C = \{z : |z| = 2\}.$$

$$4.94. f(z) = \frac{z}{e^{1/z} + e^{1/2z}}, \quad C = \{z : |z| = 4\}.$$

$$4.95. f(z) = \frac{e^{z^5}}{z(1+z^5)}, \quad C = \{z : |z| = 2\}.$$

$$4.96. f(z) = \frac{1}{e^z - 1}, \quad C = \{z : |z - 3i| = 4\}.$$

$$4.97. f(z) = \frac{z}{e^z - i}, \quad C = \{z : |z - i| = 1\}.$$

$$4.98. f(z) = z^3 e^{1/z}, \quad C = \{z : |z| = 1\}.$$

$$4.99. f(z) = \frac{z^3}{z+1} e^{1/z}, \quad C = \{z : |z| = 2\}.$$

$$4.100. f(z) = \frac{z}{z+3} e^{1/(3z)}, \quad C = \{z : |z| = 4\}.$$

$$4.101. f(z) = \frac{1}{(z-i)^2 \sin z}, \quad C = \{z : |z - i| = 2\}.$$

$$4.102. f(z) = \frac{1}{(z+i)^2 \sin z}, \quad C \text{ не садржи тачке } 0 \text{ и } -1.$$

$$4.103. f(z) = \frac{\cos \frac{\pi z}{2}}{z^2(2z^2 + 5z + 2)}, \quad C = \{z : |z| = 1\}.$$

$$4.104. f(z) = \frac{\cos z}{z(z+i)^2}, \quad C = \{z : |z| = 2\}.$$

$$4.105. f(z) = \frac{\sin \frac{\pi z}{6}}{(z^2 - 3z)^2}, \quad C = \{z : |z - 3/2| = 2\}.$$

$$4.106. f(z) = \frac{\sin z}{z(z^2 + 1)}, \quad C = \{z : |z| = 1/2\}.$$

$$4.107. f(z) = \frac{\cos z}{z(z - \pi/4)^2}, \quad C = \{z : |z - i| = 3\}.$$

$$4.108. f(z) = \frac{\cos z}{z(z + 3i)^2}, \quad C = \{z : |z| = \pi\}.$$

6 Свођење одређеног интеграла на интеграл ФКП

Ако је функција $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx,$$

тада сменом $e^{ix} = z$ добијамо да је

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right) dz.$$

Слично важи и ако је функција f дефинисана на $[a, a+2\pi]$ за $a \in \mathbb{R}$.

Израчунати $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ за дату функцију f .

6.1. $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$.

6.2. $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$.

6.3. $f(x) = \frac{1}{4 + \cos x}$.

6.4. $f(x) = \frac{1}{5 + \cos x}$.

6.5. $f(x) = \frac{1}{6 + \cos x}$.

6.6. $f(x) = \frac{1}{7 + \cos x}$.

6.7. $f(x) = \frac{1}{8 + \cos x}$.

6.8. $f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$.

6.9. $f(x) = \frac{1}{3 + \sin x}$.

6.10. $f(x) = \frac{1}{4 + \sin x}$.

6.11. $f(x) = \frac{1}{4 - \sin x}$.

6.12. $f(x) = \frac{1}{5 + \sin x}$.

6.13. $f(x) = \frac{1}{5 - \sin x}$.

$$6.14. f(x) = \frac{1}{6 + \sin x}.$$

$$6.15. f(x) = \frac{1}{6 - \sin x}.$$

$$6.16. f(x) = \frac{1}{7 + \sin x}.$$

$$6.17. f(x) = \frac{1}{7 - \sin x}.$$

$$6.18. f(x) = \frac{1}{9 + \sin x}.$$

$$6.19. f(x) = \frac{1}{9 - \sin x}.$$

$$6.20. f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \cos x}.$$

$$6.21. f(x) = \frac{1}{3 + 2 \cos x}.$$

$$6.22. f(x) = \frac{1}{3 - 2 \cos x}.$$

$$6.23. f(x) = \frac{1}{5 + 3 \cos x}.$$

$$6.24. f(x) = \frac{1}{5 - 3 \cos x}.$$

$$6.25. f(x) = \frac{1}{5 + 4 \cos x}.$$

$$6.26. f(x) = \frac{1}{5 - 4 \cos x}.$$

$$6.27. f(x) = \frac{1}{7 + 3 \cos x}.$$

$$6.28. f(x) = \frac{1}{7 - 3 \cos x}.$$

$$6.29. f(x) = \frac{1}{7 + 5 \cos x}.$$

$$6.30. f(x) = \frac{1}{7 - 5 \cos x}.$$

$$6.31. f(x) = \frac{1}{9 + 5 \cos x}.$$

$$6.32. f(x) = \frac{1}{9 - 5 \cos x}.$$

$$6.33. f(x) = \frac{1}{9 + 7 \cos x}.$$

$$6.34. f(x) = \frac{1}{9 - 7 \cos x}.$$

$$6.35. f(x) = \frac{1}{3 + 2 \sin x}.$$

$$6.36. f(x) = \frac{1}{3 - 2 \sin x}.$$

$$6.37. f(x) = \frac{1}{5 + 2 \sin x}.$$

$$6.38. f(x) = \frac{1}{5 - 2 \sin x}.$$

$$6.39. f(x) = \frac{1}{5 + 3 \sin x}.$$

$$6.40. f(x) = \frac{1}{5 - 3 \sin x}.$$

$$6.41. f(x) = \frac{1}{5 + 4 \sin x}.$$

$$6.42. f(x) = \frac{1}{5 - 4 \sin x}.$$

$$6.43. f(x) = \frac{1}{7 + 3 \sin x}.$$

$$6.44. f(x) = \frac{1}{7 - 3 \sin x}.$$

$$6.45. f(x) = \frac{1}{7 + 4 \sin x}.$$

$$6.46. f(x) = \frac{1}{7 - 4 \sin x}.$$

$$6.47. f(x) = \frac{1}{7 + 5 \sin x}.$$

$$6.48. f(x) = \frac{1}{7 - 5 \sin x}.$$

$$6.49. f(x) = \frac{1}{7 + 6 \sin x}.$$

$$6.50. f(x) = \frac{1}{7 - 6 \sin x}.$$

$$6.51. f(x) = \frac{1}{2 + \sqrt{3} \sin x}.$$

$$6.52. f(x) = \frac{1}{2 - \sqrt{3} \sin x}.$$

$$6.53. f(x) = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6} \sin x}.$$

$$6.54. f(x) = \frac{1}{5 - 2\sqrt{6} \sin x}.$$

$$6.55. f(x) = \frac{1}{4 + \sqrt{15} \sin x}.$$

$$6.56. f(x) = \frac{1}{4 - \sqrt{15} \sin x}.$$

$$6.57. f(x) = \frac{1}{6 + \sqrt{35} \sin x}.$$

$$6.58. f(x) = \frac{1}{6 - \sqrt{35} \sin x}.$$

$$6.59. f(x) = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3} \sin x}.$$

$$6.60. f(x) = \frac{1}{7 - 4\sqrt{3} \sin x}.$$

$$6.61. f(x) = \frac{1}{8 + 3\sqrt{7} \sin x}.$$

$$6.62. f(x) = \frac{1}{8 - 3\sqrt{7} \sin x}.$$

$$6.63. f(x) = \frac{1}{9 + 4\sqrt{5} \sin x}.$$

$$6.64. f(x) = \frac{1}{9 - 4\sqrt{5} \sin x}.$$

$$6.65. f(x) = \frac{1}{4 + \sqrt{7} \sin x}.$$

$$6.66. f(x) = \frac{1}{4 - \sqrt{7} \sin x}.$$

$$6.67. f(x) = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2} \sin x}.$$

$$6.68. f(x) = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2} \sin x}.$$

$$6.69. f(x) = \frac{1}{4 + 2\sqrt{3} \sin x}.$$

$$6.70. f(x) = \frac{1}{4 - 2\sqrt{3} \sin x}.$$

$$6.71. f(x) = \frac{1}{5 + \sqrt{21} \sin x}.$$

$$6.72. f(x) = \frac{1}{5 - \sqrt{21} \sin x}.$$

$$6.73. f(x) = \frac{1}{6 + 4\sqrt{2} \sin x}.$$

$$6.74. f(x) = \frac{1}{6 - 4\sqrt{2} \sin x}.$$

$$6.75. f(x) = \frac{1}{8 + 2\sqrt{15} \sin x}.$$

$$6.76. f(x) = \frac{1}{8 - 2\sqrt{15} \sin x}.$$

$$6.77. f(x) = \frac{1}{3 - \sin x - \cos x}.$$

$$6.78. f(x) = \frac{1}{3 + \sin x + \cos x}.$$

$$6.79. f(x) = \frac{1}{3 + \sin x - \cos x}.$$

$$6.80. f(x) = \frac{1}{3 - \sin x + \cos x}.$$

$$6.81. f(x) = \frac{1}{3 - 2 \sin x + \cos x}.$$

$$6.82. f(x) = \frac{1}{3 - 2 \sin x - \cos x}.$$

$$6.83. f(x) = \frac{1}{3 + 2 \sin x + \cos x}.$$

$$6.84. f(x) = \frac{1}{5 + 2 \sin x + \cos x}.$$

$$6.85. f(x) = \frac{1}{5 + \sin x + 2 \cos x}.$$

$$6.86. f(x) = \frac{\cos x}{4 + \sin x + 2 \cos x}.$$

$$6.87. f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{3 + 2 \sin x}.$$

$$6.88. f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{3 + 2 \sin x}.$$

$$6.89. f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{3 - 2 \sin x}.$$

$$6.90. f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{3 - 2 \sin x}.$$

$$6.91. f(x) = \frac{1 + \cos x}{2 + \sin x}.$$

$$6.92. f(x) = \frac{1 + \cos x}{2 - \sin x}.$$

$$6.93. f(x) = \frac{2 + \cos x}{2 - \sin x}.$$

$$6.94. f(x) = \frac{2 + \cos x}{2 + \sin x}.$$

$$6.95. f(x) = \frac{3 + \cos x}{2 + \sin x}.$$

$$6.96. f(x) = \frac{3 + \cos x}{2 - \sin x}.$$

$$6.97. f(x) = \frac{3 - \cos x}{2 - \sin x}.$$

$$6.98. f(x) = \frac{3 - \cos x}{2 + \sin x}.$$

$$6.99. f(x) = \frac{\cos^2 x}{13 + 12 \cos x}.$$

$$6.100. f(x) = \frac{\cos^2 x}{13 - 12 \cos x}.$$

$$6.101. f(x) = \frac{\sin^2 x}{13 - 12 \cos x}.$$

$$6.102. f(x) = \frac{\sin^2 x}{13 + 12 \cos x}.$$

$$6.103. f(x) = \frac{\sin^2 x}{5 + 3 \cos x}.$$

$$6.104. f(x) = \frac{\sin^2 x}{5 - 3 \cos x}.$$

$$6.105. f(x) = \frac{\sin^2 x}{5 + 3 \sin x}.$$

$$6.106. f(x) = \frac{\sin^2 x}{5 - 3 \sin x}.$$

$$6.107. f(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{5 + 3 \sin x}.$$

$$6.108. f(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{5 + 3 \cos x}.$$

$$6.109. f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)^2}.$$

$$6.110. f(x) = \frac{1}{(2 - \cos x)^2}.$$

$$6.111. f(x) = \frac{1}{(2 + \sin x)^2}.$$

$$6.112. f(x) = \frac{1}{(2 + \sin x)^2}.$$

$$6.113. f(x) = \frac{1}{(3 + 2 \cos x)^2}.$$

$$6.114. f(x) = \frac{1}{(3 - 2 \cos x)^2}.$$

$$6.115. f(x) = \frac{1}{(3 + 2 \sin x)^2}.$$

$$6.116. f(x) = \frac{1}{(3 - 2 \sin x)^2}.$$

$$6.117. f(x) = \frac{1}{(5 + 3 \sin x)^2}.$$

$$6.118. f(x) = \frac{1}{(5 - 3 \sin x)^2}.$$

$$6.119. f(x) = \frac{1}{(5 + 3 \cos x)^2}.$$

$$6.120. f(x) = \frac{1}{(5 - 3 \cos x)^2}.$$

$$6.121. f(x) = \frac{1}{(5 - 4 \cos x)^2}.$$

$$6.122. f(x) = \frac{1}{(5 + 4 \cos x)^2}.$$

$$6.123. f(x) = \frac{1}{(5 - 4 \sin x)^2}.$$

$$6.124. f(x) = \frac{1}{(5 + 4 \sin x)^2}.$$

$$6.125. f(x) = \frac{1}{(7 - 5 \cos x)^2}.$$

$$6.126. f(x) = \frac{1}{(7 + 5 \cos x)^2}.$$

$$6.127. f(x) = \frac{1}{(7 - 5 \sin x)^2}.$$

$$6.128. f(x) = \frac{1}{(7 + 5 \sin x)^2}.$$

$$6.129. f(x) = \frac{\cos x}{(5 - 4 \cos x)^2}.$$

$$6.130. f(x) = \frac{\cos x}{(5 - 4 \cos x)^2}.$$

$$6.131. f(x) = \frac{1}{(1 + \cos^2 x)^2}.$$

$$6.132. f(x) = \frac{1}{(2 + 3 \cos^2 x)^2}.$$

$$6.133. f(x) = \frac{1}{(4 - 3 \sin^2 x)^2}.$$