МАТЕМАТИКА 2

О једном задатку из Збирке

У књизи *Математика 2 - збирка задатака и примери колоквијума* у оквиру наслова *Први колоквијум* дато је више примера колоквијума за самосталан рад. Пример 7 садржи задатак о условном екстремуму (задатак бр.3). На молбу студената који нису могли да реше систем (за стационарне тачке) овде дајем две могућности за решавање тог система.

Задатак.

Одредити локалне екстремуме функције

$$f : (x, y) \mapsto 4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2$$

при услову $x^2 + y^2 = 1$.

Одређивање стационарних тачака.

Ако је L Лагранжова функција дефинисана са

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

где је $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, тада стационарне тачке функције L добијамо из система

$$\begin{aligned} 4x - \sqrt{3}y + \lambda x &= 0 \quad (1)\\ -\sqrt{3}x + 6y + \lambda y &= 0 \quad (2)\\ x^2 + y^2 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

($L'_x = 0$, $L'_y = 0$ и $\varphi = 0$).

Први начин за решавање система. Систем (1)-(3) може да се запише у облику

$$\begin{aligned} (4 + \lambda)x - \sqrt{3}y &= 0 \quad (4)\\ -\sqrt{3}x + (6 + \lambda)y &= 0 \quad (5)\\ x^2 + y^2 &= 1. \quad (6) \end{aligned}$$

Због једначине (6) је $(x, y) \neq (0, 0)$. Међутим, тада хомоген систем (4)-(5) има нетривијално решење (по x и y), што значи да је матрица система сингуларна. Дакле,

$$\begin{vmatrix} 4+\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 6+\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

односно $\lambda \in \{-3, -7\}$.

- За $\lambda = -3$ из система
$$x - \sqrt{3}y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$
добијамо стационарне тачке $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}; -3\right)$ и $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}; -3\right)$.

- За $\lambda = -7$ из система
$$-3x - \sqrt{3}y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$
добијамо стационарне тачке $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}; -7\right)$ и $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}; -7\right)$.

Други начин за решавање система. Ако је $x=0$, онда из једначине (1) следи да је и $y=0$. Како $x=0$ и $y=0$ није решење једначине (3), то је $xy\neq 0$. Решавањем једначина (1) и (2) по $-\lambda$ добијамо

$$\frac{4x-\sqrt{3}y}{x}=\frac{-\sqrt{3}x+6y}{y},$$

односно

$$2y+\sqrt{3}y^2-\sqrt{x^2}=0.$$

Из ове једнакости и једначине (3) следи једнакост $2xy=2\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}$ из које добијамо

$$y=\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{x}.$$

Заменом израза за y у (3) имамо биквадратну једначину (по x)

$$16x^4-16x^2+3=0.$$

Сменом $x^2=t$ добијамо $t=3/4$ или $t=1/4$.

- За $t=3/4$ имамо $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и

$$y=\sqrt{3}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\pm\frac{1}{2},\quad -\lambda=\frac{4x-\sqrt{3}y}{x}=4-\sqrt{3}\frac{\pm 1/2}{\pm\sqrt{3}/2}=3.$$

  Према томе, стационарне тачке су A и B (из првог решења).

- Слично за $t=1/4$ добијамо стационарне тачке C и D.

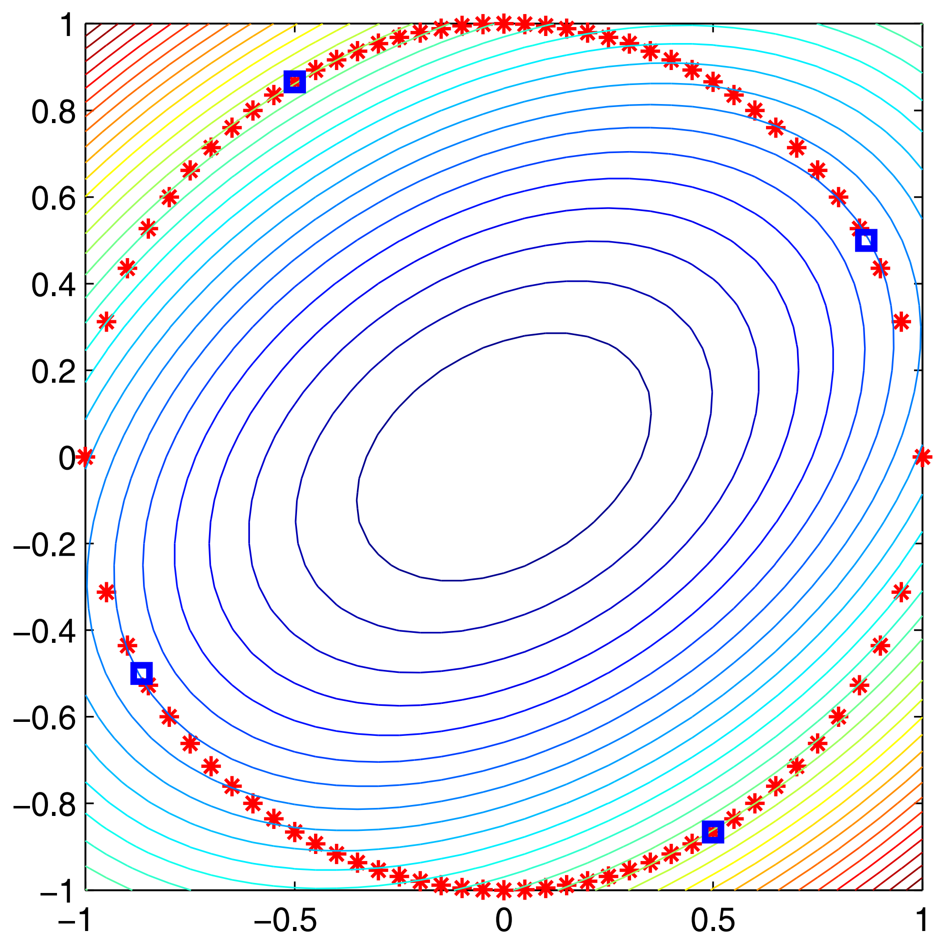
Наставак решавања задатка (други део решења).

За сваку стационарну тачку треба испитати да ли заиста представља тачку локалног екстремума. То се ради испитивањем дефинитности диференцијала другог реда у стационарним тачкама, при чему у свакој од њих треба узети у обзир везу између dx и dy (она се добија из услова $\varphi=0$). У сваком случају, до комплетног решења има још доста тога да се уради. Надам се да у овом делу решавања задатка нећете имати проблема.

На слици (следећа страна) су дате ниво линије функције f и крива (црвене звездице) дефинисана условом $\varphi=0$.

Јасно се види да у стационарним тачкама (плави квадратићи) *јесу* условни локални екстремуми (за тумачење погледати слајдове: *Тема 7 - условни екстремуми функције две променљиве - геометријска интерпретација*).

Драган Ђорић


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1