МАТЕМАТИКА 3 - Теорема 1.9.3

Драган Ђорић

Садржај

За детаљнији и прецизнији доказ Теореме 1.9.3 потребно је тврђење о условима за егзистенцију и јединственост решења хомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

са задатим почетним условима $y(x_0) = a_0$ и $y'(x_0) = a_1$.

1 Егзистенција и јединственост решења

Теорема 1. *Диференцијална једначина*

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2}$$

са почетним условима $y(x_0) = a_0$ и $y'(x_0) = a_1$ има у некој околини тачке $x = x_0$ јединствено решење ако су испуњени следећи услови:

1. *функција $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ је непрекидна у околини тачке (x_0, a_0, a_1),*

2. *за функцију f важи Липшицов [1] услов у односу на други и трећи аргумент те функције, односно за неку константу $M \in \mathbb{R}$ и произвољне тачке (x, u_1, u_2) и (x, v_1, v_2) из неке околине тачке (x_0, a_0, a_1) важи*

$$|f(x, u_1, u_2) - f(x, v_1, v_2)| \le M(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|) \tag{3}$$

[1] Rudolf Lipschitz (18321903) - немачки математичар

Ако парцијални изводи f'_{u_1} и f'_{u_2} постоје и ако су ограничени у некој околини тачке (x_0, a_0, a_1), тада је Липшицов услов (3) испуњен, при чему константа M може да буде било које горње ограничење за те парцијалне изводе.

У случају једначине (1) коју можемо да напишемо у облику (2) као

$$y'' = -q(x)y - p(x)y' = f(x, y, y') \tag{4}$$

имамо да је $f'_y = -q(x)$ и $f'_{y'} = -p(x)$. Уколико претпоставимо да су функције p и q непрекидне на $[a, b]$, тада су парцијални изводи f'_y и $f'_{y'}$ ограничени на $[a, b]$ (својство непрекидних функција на одсечку - Математика 1), па је Липшицов услов испуњен за функцију f.

Према томе, једначина (1) са произвољним почетним условима (према Теореми 1) има јединствено решење у некој околини тачке $x_0 \in (a, b)$ ако су функције p и q непрекидне на $[a, b]$.

2 Теорема 1.9.3 (стр.36-37)

Теорема 2. *Ако су y_1 и y_2 линеарно независна решења диференцијалне једначине (1) у којој су функције p и q непрекидне на $[a, b]$, тада је*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

за свако $x \in (a, b)$.

Доказ. Претпоставимо супротно, да је $W(x_0) = 0$ за неко $x_0 \in (a, b)$ и претпоставимо да су α и β две константе за које важи $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ и

$$\begin{aligned} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) &= 0 \\ \alpha y'_1(x_0) + \beta y'_2(x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Такве константе постоје јер хомоген систем (6) (по α и β) има детерминанту $W(x_0)$ која је једнака нули (постоје нетривијална решења).

Функција $y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ (линеарна комбинација решења y_1 и y_2) је такође решење једначине (1), при чему је (због (6))

$$y(x_0) = \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = \alpha y'_1(x_0) + \beta y'_2(x_0) = 0.$$

Дакле, решење y задовољава почетне услове $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

Међутим, исте ове почетне услове испуњава и тривијално решење једначине (1). Како су за једначину (1) испуњени услови егзистенције и јединствености решења у околини тачке x_0 (јер су p и q непрекидне функције), то је и y тривијално решење ($y(x) = 0$ за свако $x \in (a, b)$). Другим речима, добили смо да за $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ важи

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0, \quad x \in (a, b),$$

а то значи да су решења y_1 и y_2 линеарно зависна.

С обзиром на то да смо добили закључак који је супротан услову у теореми (да су y_1 и y_2 линеарно независна решења), претпоставка $W(x_0) = 0$ није одржива, односно важи $W(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$.

Тиме је теорема у потпуности доказана.

3 Напомене

1. Ако су y_1 и y_2 линеарно зависне функције на (a, b), тада је $W(x) = 0$ за свако $x \in (a, b)$ (што се лако види јер је $y_2 = cy_1$) независно од тога да ли су y_1 и y_2 решења једначине (1).

2. Ако су y_1 и y_2 линеарно независне функције које нису решења једначине (1), својство (5) из Теореме 2 не мора да важи. На пример, функције

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \in (1, 2) \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1] \\ (x-1)^2, & x \in (1, 2) \end{cases}$$

   су линеарно независне (из претпоставке $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ следи да је $\alpha = \beta = 0$), при чему је $W(x) = 0$ чак за свако $x \in (0, 2)$.

3. Својство (5) је карактеристично за линеарно независна решења једначине (1) - оно је потребан (непходан) услов независности два решења једначине (1). Међутим, из 1. следи да су решења y_1 и y_2 једначине (1) независна ако за неко $x_0 \in (a, b)$ важи $W(x_0) \neq 0$. Из Теореме 2 тада закључујемо да је $W(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$. Према томе, услов (5) је потребан и довољан за линеарну независност решења y_1 и y_2 једначине (1) у којој су функције p и q непрекидне на $[a, b]$.