

ХИПЕРБОЛИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

– Дефиниција

За $z \in \mathbb{C}$ дефинишу се хиперболичке функције sh и ch једнакостима

$$sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad ch z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Функције $tanh$ и $coth$ су дефинисане са

$$tanh z = \frac{sh z}{ch z} \quad \left(z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}i \right), \quad coth z = \frac{ch z}{sh z} \quad (z \neq k\pi i).$$

– Изводи

$$(sh z)' = ch z, \quad (ch z)', \quad (tanh z)' = \frac{1}{ch^2 z}, \quad (coth z)' = -\frac{1}{sh^2 z}$$

– Основне једнакости

$$ch^2 z - sh^2 z = 1, \quad sh 2z = 2 sh z ch z, \quad ch 2z = ch^2 z + sh^2 z,$$
$$ch^2 z = \frac{ch 2z + 1}{2}, \quad sh^2 z = \frac{ch 2z - 1}{2}$$

– Нуле

Бројеви $z_k = k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$) су нуле функције $z \mapsto sh z$, а бројеви $z_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)i$ ($k \in \mathbb{Z}$) су нуле функције $z \mapsto ch z$.

– Периодичност

Функције $z \mapsto sh z$ и $z \mapsto ch z$ имају период $2\pi i$, а функције $z \mapsto tanh z$ и $z \mapsto coth z$ имају период πi .

– Веза са тригонометријским функцијама

$$sh z = -i \sin iz, \quad ch z = \cos iz, \quad tanh z = -i \tan iz, \quad coth z = i \cot iz,$$
$$sh iz = i \sin z, \quad ch iz = \cos z, \quad tanh iz = i \tan z, \quad coth iz = -i \cot z,$$

– Реални део, имагинарни део и модуло

$$sh z = sh x \cos y + i ch x \sin y, \quad |sh z| = \sqrt{\sin^2 y + sh^2 x},$$
$$ch z = ch x \cos y + i sh x \sin y, \quad |ch z| = \sqrt{\cos^2 y + sh^2 x}$$

