1. I колоквијум из Математике 1 1.

30.11.2013.

____ ______________

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) \star (c,d) = (a + (-1)^b c, b + d),$$

за све $(a,b),(c,d) \in \mathcal{A}$. Испитати да ли је $(\mathcal{A},\star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара p и q одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} p-5 & 1 & p & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & q & 5 \\ -4 & 0 & 1-2p & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & -1 \\ 2x & + & (5a+1)y & + & 14z & = & 1 \\ 4x & - & 8y & + & 12z & = & b-3. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су праве $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-5}{-1}$ и $q : \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{1}$, раван $\alpha : 5x - y + z - 7 = 0$ и тачка $K(2,-2,1)$.

а) Доказати да се праве p и q секу и одредити пресечну тачку S, као и меру угла који оне образују.

б) Одредити једначину праве која садржи тачке S и K, као и једначину равни која садржи средиште дужи SK и паралелна је равни α.

2. I колоквијум из Математике 1 2.

30.11.2013.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{C} = (0,1) \cup (1,+\infty)$ и $*$ бинарна операција дефинисана као:

$$a * b = a^{\log_5 b},$$

за све $a, b \in \mathcal{C}$. Испитати да ли је $(\mathcal{C}, *)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$XAB = S + 2X,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = A^T$ и $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара p и q дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & + & 4z & + & 7w & = & 0 \\ & & y & + & z & + & (7-p)w & = & -1 \\ 3x & + & 8y & + & (3p-4)z & + & 19w & = & q+3. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дати су вектори $\vec{e}_1 = (2,-1,1,0)$, $\vec{e}_2 = (a,0,1,2)$, $\vec{e}_3 = (5,-4,3,0)$ и $\vec{e}_4 = (2,-1,1,a-3)$ у векторском простору $V = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ и $a \in \mathbb{R}$.

а) Одредити вредности параметра a за које су дати вектори линеарно независни.

б) За $a = 3$ испитати да ли дати вектори чине базу векторског простора V. Уколико чине базу, одредити координате вектора $\vec{v} = (1,2,-1,0)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$.

I колоквијум из Математике 1

3.

30.11.2013.

____ ____________

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) \star (c,d) = (a + 2^b c, b + d),$$

за све $(a,b),(c,d) \in \mathcal{A}$. Испитати да ли је $(\mathcal{A},\star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -3 & -6 & -5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & - & z & = & 5 \\ 3x & - & y & - & az & = & a-3 \\ 6x & + & (3a-1)y & - & 5z & = & 14. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су праве $p : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+3}{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $q : \begin{cases} x - 2y - z - 1 = 0 \\ 3x + y + 5 = 0 \end{cases}$, као и раван $\alpha : x - 2y + z - 5 = 0$

а) Одредити вредност параметра λ тако да права p буде паралелна равни α, и за тако одређен λ одредити једначину равни која садржи праву p и паралелна је са α.

б) За $\lambda = 1$ одредити растојање између правих p и q.

I колоквијум из Математике 1

4.

30.11.2013.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{C} = (0,1) \cup (1,+\infty)$ и $*$ бинарна операција дефинисана као:

$$a * b = a^{\log_3 b},$$

за све $a, b \in \mathcal{C}$. Испитати да ли је $(\mathcal{C}, *)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$MX + B^T = X,$$

при чему је $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & z & + & 5w & = & 1 \\ 3x & & & + & 5z & + & aw & = & 0 \\ 5x & + & 4y & + & (5-2a)z & + & (a+10)w & = & b-2. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дати су вектори $\vec{e}_1 = (a+4, 5, 3, 4)$, $\vec{e}_2 = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{e}_3 = (2, 2, 2, 5)$ и $\vec{e}_4 = (1, 0, 1, a+4)$ у векторском простору $V = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ и $a \in \mathbb{R}$.

а) Одредити вредности параметра a за које су дати вектори линеарно зависни.

б) За $a = 1$ испитати да ли дати вектори чине базу векторског простора V. Уколико чине базу, одредити координате вектора $\vec{v} = (1, 0, -1, 1)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$.

I колоквијум из Математике 1

30.11.2013.

презиме и име студента

број индекса

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{M} = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{Q}, a > 0\}$ и $\circ$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b,c) \circ (m,n,p) = (am, bm+n, cm+p),$$

за све $(a,b,c), (m,n,p) \in \mathcal{M}$. Испитати да ли је $(\mathcal{M}, \circ)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$ABX = 2X - 5C,$$

при чему је $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $A = B^T$ и $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & aw & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & - & (12-3a)w & = & 2 \\ 5x & + & 13y & + & 3(a+1)z & + & (26+a)w & = & b+3. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су равни $\alpha : x - 3y + 2z - 5 = 0$, $\beta : -2x + 6y - mz + 7 = 0$, $m \in \mathbb{R}$ и тачка $N(4,0,0)$.

а) Одредити вредност параметра m тако да дате равни буду паралелне, и за тако добијени m одредити растојање тачке N од равни β.

б) Одредити нормалну пројекцију тачке N на раван α.

I колоквијум из Математике 1

30.11.2013.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\ ,\ a \neq 0\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) \star (x,y) = (-ax, x - bx + y),$$

за све $(a,b),(x,y) \in \mathcal{A}$. Испитати да ли је $(\mathcal{A},\star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра m дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 7y & - & mz & = & -1 \\ -2x & - & my & + & z & = & m \\ 2x & + & 25y & + & (1-4m)z & = & -1. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дати су вектори $\vec{e}_1 = (4,-1,-2,10)$, $\vec{e}_2 = (1, a-2, 0, 2)$, $\vec{e}_3 = (-2,-2,-4,a-8)$ и $\vec{e}_4 = (1,1,2,3)$ у векторском простору $V = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ и $a \in \mathbb{R}$.

а) Одредити вредности параметра a за које су дати вектори линеарно независни.

б) За $a = -1$ испитати да ли дати вектори чине базу векторског простора V. Уколико чине базу, одредити координате вектора $\vec{v} = (1,0,-1,0)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$.

I колоквијум из Математике 1

7.

30.11.2013.

презиме и име студента

број индекса

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{K} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ $*$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) * (c,d) = (a + 3^b c, b + d),$$

за све $(a,b),(c,d) \in \mathcal{K}$. Испитати да ли је $(\mathcal{K}, *)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} a-1 & -1 & a & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & b \\ -1 & 5 & -1-3a & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & - & 3z & = & -7 \\ 3x & - & y & + & (b-4)z & = & b-3 \\ x & - & (2b+1)y & + & 7z & = & 16. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су права $p : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-1}{-5}$, раван $\alpha : x - 2y - 3z + 8$ и тачка $S(1,0,6)$.

а) Одредити једначину равни π садржи праву p и тачку S.

б) Одредити координате тачке K која припада равни π и чија је ортогонална пројекција на раван α тачка $M(0,4,0)$.

8. I колоквијум из Математике 1 8.

30.11.2013.

______________________________ ______________

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{S} = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\ ,\ m \neq 0\}$ и $\circ$ бинарна операција дефинисана као:

$$(m,n) \circ (p,q) = (mp, p \cdot (n-1) - q),$$

за све $(m,n),(p,q) \in \mathcal{S}$. Испитати да ли је $(\mathcal{S},\circ)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити вредности реалног парематра a за које важи

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 9 & 1 \\ 18 & -9 & a-24 & 0 \\ a-3 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} < 0.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 7x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & (1-2a)y & + & 6z & = & 1 \\ -2x & - & 3y & + & 4z & = & b+1. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Нека су дате праве $p : \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z}{-1}$ и q: $\begin{cases} 3x+y+z=0 \\ 6x+2y+z+2=0 \end{cases}$, као и тачка $T(5,2,-1)$.

а) Одредити растојање између датих правих.

б) Одредити једначину равни α која садржи тачку T и нормална је на праву p, као и продор праве p кроз раван α.

3. Решења I колоквијума из Математике 1 3.

1. Како је $(0,-1)*(1,1)=(\frac{1}{2},0)\notin\mathcal{A}$ (јер $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$), па не важи затвореност операције $*$ у $\mathcal{A}$.

Како не важи затвореност, следи да структура $(\mathcal{A},*)$ није група.

Како је $(1,1)*(0,-1)=(1,0)$, а $(0,-1)*(1,1)=(\frac{1}{2},0)\notin\mathcal{A}$, операција $*$ није комутативна у $\mathcal{A}$.

Напомена. Када нека особина не важи потребно је навести контрапример!

Давали смо поене и ако сте испитали особине асоцијативности, неутралног и инверзног елемента!

Асоцијативност важи, јер је $(a,b)*\big((c,d)*(e,f)\big)=(a+2^bc+2^{b+d}e,b+d+f)=\big((a,b)*(c,d)\big)*(e,f)$ (овде смо користили особине асоцијативности, комутативности и дистрибутивности $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{R}$).

Неутрални елемент постоји и то је $(e_1,e_2)=(0,0)$, јер је $(0,0)\in\mathcal{A}$ (због $0\in\mathbb{Z}$ и $0\in\mathbb{Z}$), а важе и једнакости $(0,0)*(a,b)=(0+2^0\cdot a,0+b)=(a,b)$ и $(a,b)*(0,0)=(a+2^b\cdot 0,b+0)=(a,b)$.

Неутрални елемент не постоји, јер би решавањем (по m и n) једначине $(a,b)*(m,n)=(0,0)$ добили решење $(m,n)=(\frac{-a}{2^b},-b)$, али нпр. за $a=b=1$ добијамо да $(m,n)=(\frac{-1}{2},-1)\notin\mathcal{A}$.

2. Када израчунамо карактеристични полином добијамо $k(\lambda)=\det(A-\lambda I)=-\lambda^3-\lambda^2+2\lambda=-\lambda(\lambda^2+\lambda-2)$, одакле добијамо сопствене вредности $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-2$.

За $\lambda_1=0$ из матричне једначине $(A-0\cdot I)\cdot v=O$, добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcrcl}(1-0)\cdot x & + & 6y & + & 3z & = & 0\\ -3x & + & (-6-0)\cdot y & - & 5z & = & 0\\ 3x & + & 3y & + & (4-0)\cdot z & = & 0,\end{array}$$

чијим решавањем добијамо сопствене векторе $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

За $\lambda_1=1$ из матричне једначине $(A-1\cdot I)\cdot v=O$, добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcrcl}(1-1)\cdot x & + & 6y & + & 3z & = & 0\\ -3x & + & (-6-1)\cdot y & - & 5z & = & 0\\ 3x & + & 3y & + & (4-1)\cdot z & = & 0,\end{array}$$

чијим решавањем добијамо сопствене векторе $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

За $\lambda_1=-2$ из матричне једначине $(A-(-2)\cdot I)\cdot v=O$, тј. $(A+2\cdot I)\cdot v=O$, добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcrcl}(1+2)\cdot x & + & 6y & + & 3z & = & 0\\ -3x & + & (-6+2)\cdot y & - & 5z & = & 0\\ 3x & + & 3y & + & (4+2)\cdot z & = & 0,\end{array}$$

чијим решавањем добијамо сопствене векторе $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3. Када направимо степанасти облик система добијамо:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & - & z & = & 5 \\ & & (-1-3a)y & + & (3-a)z & = & a-18 \\ & & & & (a-2)z & = & 2-a. \end{array}$$

За $a \neq 2,\ a \neq -\frac{1}{3}$ систем има јединствено решење: $(x,y,z) = \left(\frac{4-3a}{1+3a}, \frac{15}{1+3a}, -1\right)$.

За $a = 2$ III једначина је $0 = 0$ и њу обришемо. У овом случају систем има бесконачно много решења која зависе од 1 параметра α (β или γ зависно коју смо променљиву узели за слободну!) :

$(x,y,z) = \left(\frac{3+5\alpha}{7}, \frac{16+\alpha}{7}, \alpha\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) = (5\beta - 11, \beta, 7\beta - 16), \quad \beta \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) = \left(\gamma, \frac{11+\gamma}{5}, \frac{7\gamma-3}{5}\right), \quad \gamma \in \mathbb{R}$.

За $a = -\frac{1}{3}$ претходни систем није у степенастом облику (јер и у II и у III једначини имамо z), па треба урадити још 1 корак у Гаусовом систему елиминације. У овом случају систем нема решења.

Напомена. Задатак се могао решавати и преко детерминанти. Детерминанте које се јављају у Крамеровим формулама су једнаке: $\Delta = -3a^2+5a+2 = -(1+3a)(a-2)$, $\Delta_x = 3a^2-10a+8 = (3a-4)(a-2)$, $\Delta_y = 30 - 15a = -15(a-2)$, $\Delta_z = 3a^2 - 5a - 2 = (1+3a)(a-2)$.

Овде је честа грешка била да се погрешно растави квадратни трином: $ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

На основу детерминанти директно следе решења случајева $a \neq 2,\ a \neq -\frac{1}{3}$ и $a = -\frac{1}{3}$, док се случај $a = 2$ мора урадити Гаусовим системом елиминације.

4. а) $\vec{v}_p = (2,3,\lambda)$, $P(0,1,-3)$. $q\colon x = t,\ y = -3t-5, z = 7t+9,\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v}_q = (1,-3,7)$, $P(0,-5,9)$. $\vec{n}_\alpha = (1,-2,1)$.

Да би било $p \parallel \alpha$ мора бити $\vec{v}_p \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{v}_p \cdot \vec{n}_\alpha = 0$, тј. $2 - 6 + \lambda = 0$, одакле је $\lambda = 4$.

За раван β која садржи праву p и паралелна је са равни α имамо $\beta \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta = \vec{n}_\alpha = (1,-2,1)$. Како је $p \in \beta$ имамо да тачка $P(0,1,-3) \in \beta$, па је $\beta\colon 1\cdot(x-0) + (-2)\cdot(y-1) + 1\cdot(z-(-1)) = 0$, тј. $x - 2y + z + 5 - 0$.

б) За $\lambda = 1$ имамо да је $\vec{v}_p = (2,3,1)$, па како је $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-3} \neq \frac{1}{7}$ добијамо да је $\vec{v}_p \neq k\cdot\vec{v}_q$, тј. праве p и q нису паралелне, па можемо користити наредну формулу: $d(p,q) = \dfrac{|(\vec{v}_p \times \vec{v}_q)\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|(\vec{v}_p \times \vec{v}_q)|}$. Како је $\overrightarrow{PQ} = (0,-6,12)$ и

$$\vec{v}_p \times \vec{v}_q = (2,3,1)\times(1,-3,7) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = (24,-13,-9), \qquad (\vec{v}_p \times \vec{v}_q)\cdot\overrightarrow{PQ} = 0 + 78 - 108 = -30,$$

$|\vec{v}_p \times \vec{v}_q| = |(24,-13,-9)| = \sqrt{24^2 + (-13)^2 + (-9)^2} = \sqrt{826}$, добијамо $d(p,q) = \dfrac{30}{\sqrt{826}}$.