A **I колоквијум из Математике 1** **A**

3. децембар 2011.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0\\ b & \frac{1}{a} & 0\\ c & 0 & a\end{pmatrix}:\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ a\neq 0\right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M},\cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & m & 5\end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра m.

3. У зависности од реалног параметра α решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & + & 4w & = & 2\\ 2x & - & y & + & z & - & w & = & -1\\ 3x & + & \alpha\cdot y & - & 2z & + & 3w & = & 1.\end{array}$$

4. Дати су вектори $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(2,1,1)$ и $\vec{c}=(-1,-2,1)$.

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Уколико чине базу одредити запремину тетраедра (пирамиде) коју чине вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а у супротном изразити вектор $\vec{c}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

в) Одредити вредност параметра λ тако да вектор $\vec{d}=(1,2,\lambda)$ буде компланаран са векторима $\vec{c}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \begin{cases} 2x+y-z-6=0\\ -x-y+z+3=0\end{cases} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 3x-y-z-7=0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A\in a$ и $B\in\beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

г) Уколико се права a и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β.

д) Одредити растојање од координатног почетка O до праве a, $d(O,a)$.

Б I колоквијум из Математике 1 Б

3. децембар 2011.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. Нека је у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ операција $*$ дефинисана са

$$a * b = a + b - 1.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathbb{R}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathbb{R}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathbb{R}, *)$ Абелова група?

2. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, тј. за које важи $A \cdot X = X \cdot A$. Објаснити ког облика мора бити матрица X.

3. У зависности од реалног параметра β решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & (2-\beta)z & = & 0 \\ (\beta-5)x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & (\beta+1)y & - & 2z & = & 0. \end{array}$$

4. Дати су вектори $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 3, 1)$ и $\vec{c} = (-1, 2, 4)$.

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Уколико чине базу одредити запремину тетраедра (пирамиде) коју чине вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а у супротном изразити вектор $\vec{c}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

в) Одредити вредност параметра λ тако да вектор $\vec{d} = (-3, 3, \lambda)$ буде компланаран са векторима $\vec{c}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$.

5. Нека су дате тачка M и права p у простору:

$$M(1, -2, 3), \qquad p: \ \frac{x}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{-1}.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и координате произвољне тачке $P \in p$.

б) Одредити раван α која садржи тачку M и нормална је на праву p.

в) Одредити тачку продора праве p кроз раван α (то је баш пројекција тачке M на праву p, тј. $p \cap \alpha$).

г) Одредити растојање тачке M од праве p.

д) Одредити једначину праве q која садржи тачку M и нормална је на праву p.

Ф I колоквијум из Математике 1 Ф

3. децембар 2011.

______________________ ______________ __________

презиме и име студента | број индекса | група за вежбе

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : \ a,\ b \in \mathbb{R},\ a > 0 \ \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & f & 2 & 1 \\ 2 & 2f+1 & 3 & f \\ 3 & f-2 & 2 & -17 \end{pmatrix}$$

у зависности од реалног параметра f.

3. У зависности од реалног параметра ϕ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} \phi \cdot x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ x & + & y & + & z & = & 4. \end{array}$$

4. Нека су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такви да важи

$$|\vec{a}| = 1, \qquad |\vec{b}| = 4, \qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{12}.$$

и угао између њих није туп.

а) Да ли су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независни?

б) Одредити вредност скаларног производа $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Да ли су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални?

в) Израчунати површину троугла конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

г) Израчунати вредност скаларног производа $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.

5. Дате су праве p и q у простору:

$$p\colon \frac{x}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-6}{1} \qquad \text{и} \qquad q\colon \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p и вектор правца $\vec{v}_q$ праве q.

б) Одредити произвољне тачке $P \in p$ и $Q \in q$.

в) Одредити међусобни положај праве p и праве q.

г) Уколико се права p и права q секу одредити њихов пресек као и једначину (једне) равни π коју одређују праве p и q, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање, $d(p,q)$, као и тачку продора T праве p кроз xOy раван.

Г **I колоквијум из Математике 1** **Г**

3. децембар 2011.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је у скупу реалних бројева $\mathbb{Z}$ операција $\star$ дефинисана са

$$a \star b = a + b + 3.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathbb{Z}, \star)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathbb{Z}, \star)$ група? Да ли је структура $(\mathbb{Z}, \star)$ Абелова група?

2. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, тј. за које важи $A \cdot X = X \cdot A$. Објаснити ког облика мора бити матрица X.

3. У зависности од реалног параметра d решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 5y & + & (d-3)z & = & -2 \\ x & + & 3y & + & 6z & = & 10 \\ 4x & + & d \cdot y & + & 5z & = & 13. \end{array}$$

4. Нека су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такви да важи

$$|\vec{a}|^2 = 9, \qquad |\vec{b}|^2 = 8, \qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = 6$$

и угао између њих није туп.

а) Да ли су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независни?

б) Одредити вредност скаларног производа $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Да ли су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални?

в) Израчунати површину троугла конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

г) Израчунати вредност скаларног производа $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$.

5. Нека су дате тачка S и права p у простору:

$$S(1,1,2), \qquad p: \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 4z + 11 = 0. \end{cases}$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и координате произвољне тачке $P \in p$.

б) Одредити раван α која садржи тачку S и нормална је на праву p.

в) Одредити тачку продора праве p кроз раван α (то је баш пројекција тачке S на праву p, тј. $p \cap \alpha$).

г) Одредити растојање тачке S од праве p.

д) Одредити једначину праве q која садржи тачку S и нормална је на праву p.

Д I колоквијум из Математике 1 Д

3. децембар 2011.

презиме и име студента | **број индекса** | **група за вежбе**

1. Дата је структура $(A,+)$, при чему је

$$A = \{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \mid a,b,c,d \in \mathbb{N}\}$$

и $+$ је операција сабирања полинома.

Испитати које од следећих особина има структура $(A,+)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A,+)$ група? Да ли је структура $(A,+)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $R = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$RX + Q = 2P^{\mathrm{T}}X.$$

3. У зависности од реалног параметра ϕ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} \phi \cdot x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 6 \\ x & + & 3y & + & z & = & 4. \end{array}$$

4. Дата су 4 вектора у векторском простору $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = (1,2,5), \qquad \vec{b} = (2,3,4), \qquad \vec{c} = (1,5,6), \qquad \vec{d} = (4,7,14).$$

а) Да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$?

б) Показати да се вектор $\vec{c}$ не може изразити преко вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а да вектор $\vec{d}$ може. Изразити вектор $\vec{d}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

в) Израчунати запремину паралелопипеда (призме) конструисаног над векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

5. Дате су праве p и q у простору:

$$p\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-7} \qquad \text{и} \qquad q\colon \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p и вектор правца $\vec{v}_q$ праве q.

б) Одредити произвољне тачке $P \in p$ и $Q \in q$.

в) Одредити међусобни положај праве p и праве q.

г) Уколико се права p и права q секу одредити њихов пресек као и једначину (једне) равни π коју одређују праве p и q, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање, $d(p,q)$, као и тачку продора T праве p кроз xOy раван.

Е I колоквијум из Математике 1 Е

3. децембар 2011.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$, при чему је a реалан број.

За које вредности параметра a је $D \leqslant 0$?

3. У зависности од реалног параметра e решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & z & + & w & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & - & w & = & 0 \\ 4x & + & 3y & & & + & e \cdot w & = & 0. \end{array}$$

4. Дата су 4 вектора у векторском простору $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = (1, -2, 4), \qquad \vec{b} = (2, 3, 1), \qquad \vec{c} = (4, 5, 6), \qquad \vec{d} = (4, 13, -5).$$

а) Да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$?

б) Показати да се вектор $\vec{c}$ не може изразити преко вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а да вектор $\vec{d}$ може. Изразити вектор $\vec{d}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

в) Израчунати запремину паралелопипеда (призме) конструисаног над векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

5. Нека су дате тачка B и раван α у простору:

$$B(2, 3, -1), \qquad \alpha : \; 2x + y - 4z + 5 = 0.$$

а) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ равни α, као и координате произвољне тачке $A \in \alpha$.

б) Одредити једначину праве n која садржи тачку B и нормална је на раван α.

в) Одредити координате пројекције P тачке B на раван α (то је продор праве n кроз раван α, тј. $n \cap \alpha$).

г) Одредити координате симетричне тачке B' тачки B у односу на раван α (важи $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PB'}$).

д) Одредити растојање тачке B' од равни α.

Л **I колоквијум из Математике 1** Л

3. децембар 2011.

презиме и име студента | **број индекса** | **група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 & a \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} : \ a, \ b, \ c \in \mathbb{R}, \ b \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & x & y & x+y \\ 0 & y & x+y & x \\ 0 & x+y & x & y \end{vmatrix}$, при чему су x и y реални бројеви и $y > 0$.

За које вредности параметра x је $D \geqslant 0$?

3. У зависности од реалног параметра λ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & \lambda. \end{array}$$

4. Дата су 3 узастопна темена паралелограма $ABCD$: $A(0,1,0)$, $B(1,\lambda,1)$ и $C(0,2,1)$, где је λ реалан параметар.

а) Одредити координате четвртог темена паралелограма D.

б) Израчунати векторски производ $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$.

в) Одредити вредности λ тако да је површина паралелограма $ABCD$ једнака $\sqrt{3}$.

г) За најмању вредност λ одређену под в) израчунати дужину висине из темена C на страницу AB, као и величину угла $\sphericalangle CAB$.

5. Дате су раван α и раван β у простору:

$$\alpha\colon 2x + y - z - 2 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon x - y + z + 5 = 0.$$

а) Одредити вектор вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ на раван α и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај равни α и равни β.

г) Уколико се раван α и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.

д) Одредити растојање од координатног почетка O до равни α, $d(O, \alpha)$.

M **I колоквијум из Математике 1** **M**

3. децембар 2011.

презиме и име студента | **број индекса** | **група за вежбе**

1. Дата је структура $(\mathcal{M},\cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M}=\left\{\frac{2a-1}{2b-1}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{N}\right\}$$

и $\cdot$ је операција множења рационалних бројева.

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M},\cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\0&4&0\\0&1&4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$3X+B^{\mathrm{T}}=A\cdot X.$$

3. У зависности од реалног параметра m решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&z&=&4\\ 2x&+&m\cdot y&+&2z&=&6\\ x&+&m\cdot y&+&z&=&4.\end{array}$$

4. Дата су 3 узастопна темена паралелограма $ABCD$: $A(1,2,0)$, $B(1,3,1)$ и $C(\lambda,2,2)$, где је λ реалан параметар.

а) Одредити координате четвртог темена паралелограма D.

б) Израчунати векторски производ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$.

в) Одредити вредности λ тако да је површина паралелограма $ABCD$ једнака 2.

г) За све вредности λ одређене под в) израчунати дужину висине из темена A на страницу BC, као и величину угла $\sphericalangle ACB$.

5. Нека су дате тачка B и раван α у простору:

$$B(3,2,1),\qquad \alpha:\ 2x+y+z-3=0.$$

а) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ равни α, као и координате произвољне тачке $A\in\alpha$.

б) Одредити једначину праве n која садржи тачку B и нормална је на раван α.

в) Одредити координате пројекције P тачке B на раван α (то је продор праве n кроз раван α, тј. $n\cap\alpha$).

г) Одредити растојање тачке B од равни α.

д) Одредити једначину равни β која садржи тачку B и паралелна је равни α.

А Резултати I колоквијума из Математике 1 А

1. Јесте група, али није Абелова група.
Неутрални елемент је јединична матрица $I_3 = M(1,1,1)$, а инверзни елемент за $M(a,b,c)$ је $M(\frac{1}{a}, -ba^2, -c)$.
Пример зашто комутативност не важи:

$$M(1,1,2)\cdot M(2,1,1) = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\1&\frac{1}{2}&0\\1&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\2&0&2\end{pmatrix} = M(2,\frac{3}{2},2)$$

$$M(2,1,1)\cdot M(1,1,2) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\1&\frac{1}{2}&0\\1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\5&0&2\end{pmatrix} = M(2,\frac{3}{2},5).$$

2. За $m=-4$ ранг је $r(A)=3$, а за $m\neq -4$ је $r(A)=4$.

3. За $\alpha = 1$ има бесконачно моного решења која зависе од 2 параметра:

$$(x,y,z,w) = (t,p,-9t+2p-2,-7t+p-1),\quad t,p\in\mathbb{R}.$$

За $\alpha\neq 1$ има бесконачно моного решења која зависе од 1 параметра:

$$(x,y,z,w) = (s,0,-9s-2,-7s-1),\quad s\in\mathbb{R}.$$

4. а) Како је $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&1\\-1&-2&1\end{vmatrix} = 0$, па не чине базу. **б)** $\vec{c} = 3\vec{a}-2\vec{b}$.

в) $\vec{a}\times\vec{b} = (-1,1,1)$. Вектор $\vec{d}$ је компланаран (тј. лин. завистан) са $\vec{c}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ за $\lambda=-1$.

5. а,б) Права a је задата са $x=3,\ y=t,\ z=t,\ t\in\mathbb{R}$.
Њен вектор правца је $\vec{v}_p=(0,1,1)$ и једна тачка је $P(3,0,0)$ (за $t=0$).
Вектор нормале на раван је $\vec{n}_\beta = (3,-1,-1)$, а једна тачка је нпр. $B(0,0,7)$.

в,г) Права и раван се секу и то у тачки $P(3,1,1)$.

д) Координатни почетак је тачка $O(0,0,0)$.

Растојање тачке O од праве p је дато обрасцем $d(O,p) = \dfrac{|\vec{v}_p\times\overrightarrow{PO}|}{|\vec{v}_p|} = \dfrac{|(0,-3,-3)|}{|(0,1,1)|} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3.$

Б Резултати I колоквијума из Математике 1 Б

1. Јесте Абелова група, а самим тим је и група.
Неутрални елемент је $e = 1 \in \mathbb{R}$, а инверзни елемент за a је $2 - a \in \mathbb{R}$. Остале особине следе на основу затворености $+$ и $-$ у $\mathbb{R}$, као и асоцијативности и комутативности операције $+$ у $\mathbb{R}$.

2. Да би матрице A и X комутирале, мора да важи $A \cdot X = X \cdot A$, а да би оба ова производа постојала, матрица X мора бити

$$\underset{2\times 2}{A} \cdot \underbrace{\underset{2\times \_}{X} = \underset{\_\times 2}{X}}_{2\times 2} \cdot \underset{2\times 2}{A}$$

облика 2×2.

Како је X непозната матрица, ставићемо да је $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Измножимо матрицу A и X на оба начина:

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} x+2z & y+2w \\ 3x+4z & 3y+4w \end{bmatrix} \qquad X \cdot A = \begin{bmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3w & 2z+4w \end{bmatrix},$$

што се своди на решавање следећег система:

$$x + 2z = x + 3y, \qquad y + 2w = 2x + 4y, \qquad 3x + 4z = z + 3w, \qquad 3y + 4w = 2z + 4w.$$

Решење зависи од 2 параметра t:

$$(x, y, z, w) = (-3t + s, 2t, 3t, s) \quad t, s \in \mathbb{R},$$

тј. све тражене матрице имају облик $X = \begin{bmatrix} -3t+s & 2t \\ 3t & s \end{bmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

3. Детерминанта датог система је једнака $\Delta = -a^3 + 6a^2 - 9a = -a(a-3)^2$.
За $\beta \neq 0$ и $\beta \neq 3$ систем има јединствено решење: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
За $\beta = 0$ има бесконачно моного решења која зависе од 1 параметра: $(x, y, z) = (2p, -2p, p)$, $p \in \mathbb{R}$.
За $\beta = 3$ има бесконачно моного решења која зависе од 2 параметра: $(x, y, z) = (-2q + r, q, r)$, $q, r \in \mathbb{R}$.

4. а) Како је $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 24$, па су линеарно независни.

3 линеарно независна вектора у простору $\mathbb{R}^3$ димензије 3 чине базу. **б)** $V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = 4$.

в) $\vec{a} \times \vec{b} = (-6, 3, 3)$. Вектор $\vec{d}$ је компланаран (тј. лин. завистан) са $\vec{c}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ за $\lambda = 5$.

5. а) Вектор правца праве p је $\vec{v}_p = (2, 0, -1)$ и једна тачка је $P(0, 2, 4)$.

б) Вектор нормале на раван α је $\vec{n}_\alpha = v_p = (2, 0, -1)$, па је $\alpha :\ 2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - (-2)) - 1 \cdot (z - 3) = 0$, тј. $\alpha :\ 2x - z + 1 = 0$.

в) Права p и раван α се секу и то у тачки $T(\frac{6}{5}, 2, \frac{17}{5})$.

г) Координатни почетак је тачка $O(0, 0, 0)$.

Растојање тачке O од праве p је дато обрасцем $d(M, p) = \dfrac{|\vec{v}_p \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{v}_p|} = \dfrac{|(-4, 1, -8)|}{|(2, 0, -1)|} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

д) Права q је баш права која пролази кроз тачке M и T.
За њен вектор правца можемо узети $\vec{v}_q = 5 \cdot \overrightarrow{MT} = (1, 20, 2)$ (множимо са 5 да не би имали разломке!), а једна тачка је M. Стога је права $q :\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{20} = \dfrac{z-3}{2}$.

Г Резултати I колоквијума из Математике 1 Г

1. 1° Из $a, b, 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b + 3 \in \mathbb{Z}$, тј. $a \star b \in \mathbb{Z}$, па је операција $\star$ затворена у $\mathbb{Z}$.

2° На основу комутативности и асоцијативности операције $+$ у $\mathbb{R}$ (па и у његовом подскупу $\mathbb{Z}$) следи:

$$a \star (b \star c) = a \star (b + c + 3) = a + b + c + 3 + 3 = a + b + c + 6 = a + b + 3 + c + 3 = (a + b + 3) \star c = (a \star b) \star c.$$

Тиме смо показали да је операција $\star$ и асоцијативна.

3° За неутрални елемент треба да важи $a \star e = e \star a = a$. Решавањем ових једначина добијамо $e = -3 \in \mathbb{Z}$.

4° За инверзни елемент треба да важи $a \star a' = a' \star a = a$. Решавањем ових једначина добијамо да је инверзни елемент за a једнак $a' = -6 - a \in \mathbb{R}$.

5° Због комутативности операције $+$ у $\mathbb{R}$ важи

$$a \star b = a + b + 3 = b + a + 3 = b \star a,$$

Тиме смо показали да је операција $\star$ и комутативна.

На основу свега претходног следи до ово јесте Абелова група, а самим тим је и група.

2. Да би матрице A и X комутирале, мора да важи $A \cdot X = X \cdot A$, а да би оба ова производа постојала, матрица X мора бити

$$\underset{2\times2}{A} \cdot \underbrace{\underset{2\times\_}{X} = \underset{\_\times2}{X}}_{2\times2} \cdot \underset{2\times2}{A}$$

облика 2×2.

Како је X непозната матрица, ставићемо да је $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Измножимо матрицу A и X на оба начина:

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + z & 2y + w \\ 3x + 2z & 3y + 2w \end{bmatrix} \qquad X \cdot A = \begin{bmatrix} 2x + 3y & x + 2y \\ 2z + 3w & z + 2w \end{bmatrix},$$

што се своди на решавање следећег система:

$$2x + z = 2x + 3y, \qquad 2y + w = x + 2y, \qquad 3x + 2z = 2z + 3w, \qquad 3y + 2w = z + 2w.$$

који је еквивалентан са системом $z - 3y = 0$, $x - w = 0$. Решење зависи од два параметра:

$$(x, y, z, w) = (p, t, 3t, p) \quad p, t \in \mathbb{R},$$

тј. тражене матрице имају облик $A = \left\| \begin{matrix} p & t \\ 3t & p \end{matrix} \right\|$, $p, t \in \mathbb{R}$.

3. Систем је облика 3 са 4 и морамо ићи Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & = & 0 & \\
2x & - & 5y & + & (d-3)z & = & -2 & \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\
x & + & 3y & + & 6z & = & 10 & \mathrm{III} - \mathrm{I} \\
4x & + & dy & + & 5z & = & 13 & \mathrm{IV} - 4 \cdot \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & - & 2y & + & z & = & 0 \\
 & - & 5y & + & (d-5)z & = & -2 \\
 & & 5y & + & 5z & = & 10 \\
 & & (d+8)y & + & z & = & 13
\end{array}$$

Сада ћемо III једначину поделити са 5 и заменити места II и III једначини.

$$\begin{array}{rrrrrrl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & - & 5y & + & (d-5)z & = & -2 \quad \mathrm{III}+\mathrm{II} \\ & & (d+8)y & + & z & = & 13 \quad \mathrm{IV}-(d+8)\cdot\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & (d-4)z & = & 0 \\ & & & & (-7-d)z & = & -3-2d \end{array}$$

Сада ћемо имати 2 случаја: $d = 4$ и $d \neq 4$.

1° $d = 4$ систем постаје:

$$\begin{array}{rrrrrrr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & - & 11z & = & -11 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & - & 11z & = & -11 \end{array}$$

Овде су x, y и z везане променљиве, па враћањем уназад добијамо јединствено решење: $\boxed{(x, y, z) = (1, 1, 1)}$.

2° $d \neq 4$ III једначину можемо поделити са $d - 4 \neq 0$ и систем постаје:

$$\begin{array}{rrrrrrl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & (-7-d)z & = & -3-2d \quad \mathrm{IV}+(7+d)\cdot\mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & -3-2d \end{array}$$

Сада се овај случај дели на 2 подслучаја: $d = -\frac{3}{2}$ и $d \neq 4, -\frac{3}{2}$.

2° а) $d = 4$ IV једначина је $0 = 0$ и њу можемо да обришемо и систем постаје:

$$\begin{array}{rrrrrrr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}$$

Овде су x, y и z везане променљиве, па враћањем уназад добијамо јединствено решење: $\boxed{(x, y, z) = (4, 2, 0)}$.

2° б) $d \neq 4, -\frac{3}{2}$ због IV једначине $0 = -3 - 2d$ добијамо да $\boxed{\text{систем нема решења}}$.

Да обједнимо све претходно добијено у један финалан закључак:

За $d \neq 4$ и $d \neq -\frac{3}{2}$ систем нема решења.
За $d = 4$ има јединствено решење: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.
За $d = -\frac{3}{2}$ има јединствено решење: $(x, y, z) = (4, 2, 0)$.

4. а) Како је $|\vec{a}\times\vec{b}| = 6 \;\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{0}$, па вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нису колинеарни, тј. они су линеарно независни.

б) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 6 \;\Rightarrow \sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{6}{3\cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\pi}{4}$ (јер угао није туп).

Тражени скаларни производ је $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 6$.

Како је $\vec{a}\cdot\vec{b} \neq 0$ следи да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нису ортогонални.

Напомена. $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ смо могли да добијемо и на основу тригонометријске формуле $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

в) Површину троугла конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнака је $P = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$.

г) Скаларни производ $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + 3\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{a} - 6\vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - 6|\vec{b}|^2 = 9 - 6 - 6\cdot 8 = -33$ (овде смо користили да је $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, $\vec{b}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b}$ и $\vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2$).

5. а) Решавањем система $2x - y + z - 1 = 0$, $3x + y - 4z + 11 = 0$ добијамо параметарски облик једначине праве p: $z = 5t$, $t \in \mathbb{R}$ (ово смо узели уместо t да не би „вукли“ разломке), $y = -5 + 11t$, $x = -2 + 3t$.

Одатле добијамо вектор правца $\vec{v}_p = (3, 11, 5)$, као и координате неке њене произвољне тачке, нпр. $P(-2, -5, 0)$.

Напомена. Вектор правца је могао да се добије и као $\vec{v}_p = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2, -1, 1) \times (3, 1, -4)$; $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ су вектори нормала на равни чијим пресеком је задата права p. Тачку P смо могли да одредимо из система $2x - y + z - 1 = 0$, $3x + y - 4z + 11 = 0$, тако што једну координату фиксирамо, нпр. ставимо да је $z = 0$, а онда добијемо остале 2.

б) За раван α која је нормална на праву p, важи $\vec{n}_\alpha = \vec{v}_p = (3, 11, 5)$. Како она и садржи тачку $S(1, 1, 2)$, добијамо да је њена једначина $\alpha:\; 3\cdot(x-1) + 11\cdot(y-1) + 5\cdot(z-2) = 0$, што након сређивања даје $\alpha:\; 3x + 11y + 5z - 24 = 0$.

в) Тачка продора праве p кроз раван α (то је баш пројекција тачке S на праву p, тј. $p\cap\alpha$) добијамо тако што параметарски облик једначине праве p заменимо у једачину равни α:

$$3\cdot(-2+3t) + 11\cdot(-5+11t) + 5\cdot(5t) - 24 = 0,$$

одакле се добија да је $t = \frac{17}{31}$. Када то вратимо у параметарски облик једначине праве p добијамо да се права p и раван α секу у тачки $T(\frac{-11}{31}, \frac{32}{31}, \frac{85}{31})$.

г) Растојање тачке S од праве p је дато обрасцем $d(S,p) = \dfrac{|\vec{v}_p \times \overrightarrow{SP}|}{|\vec{v}_p|} = \dfrac{|(-8, 9, -15)|}{|(3, 11, 5)|} = \dfrac{\sqrt{370}}{\sqrt{155}} = \sqrt{\dfrac{74}{31}}$.

д) Права q која садржи тачку S и нормална је на праву p је баш права која пролази кроз тачке S и T. За њен вектор правца можемо узети $\vec{v}_q = 31\cdot\overrightarrow{ST} = (-42, 1, 23)$ (множимо са 31 да не би имали разломке!), а једна тачка је M. Стога је права $q:\; \dfrac{x-1}{-42} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{23}$.