А # I колоквијум из Математике 1 **А**

20. новембар 2010.

презиме и име студента | **број индекса** | **група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ -2a & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -5 \\ -1 & 1 & -a & -1 \\ 3 & -3 & 0 & a \end{vmatrix}$. За које вредности параметра a је $D \leqslant 0$?

3. У зависности од реалног параметра α решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & \alpha \cdot z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(2, \alpha, 2)$, $B(1, 1, 3)$, $C(3, 4, 3)$ и $D(1, 2, 5)$.

а) За коју вредност параметра α важи $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$?

б) За вредности параметра α одређене под а) проверити да ли су тачке A, B, C, D компланарне и уколико су тачке компланарне изразити вектор $\overrightarrow{AD}$, преко вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а у супротном израчунати запремину пирамиде $ABCD$.

5. Дате су тачке Q, R, S и T, као и права p у простору:

$$Q(3, -1, -3), \qquad R(-2, -1, 0), \qquad S(1, 2, -3), \qquad T(2, 0, -2); \qquad p\colon \left\{ \begin{array}{r} 2x + y + z - 6 = 0 \\ x - y + 2z = 0. \end{array} \right.$$

а) Одредити једначину равни π која садржи тачке R, S и T, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$ ($M \neq R$, $M \neq S$, $M \neq T$).

б) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и произвољну тачку P са ове праве ($P \in p$).

в) Одредити праву q која је паралелна правој p и садржи тачку Q.

г) Одредити раван α која је нормална на праву q и садржи тачку S.

Б **I колоквијум из Математике 1** Б

20. новембар 2010.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{Q}, 2a^2 + b^2 \neq 0\}$ и $*$ дефинисана са

$$(a,b) * (x,y) = (ay + bx, by - 2ax).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група?

2. Нека су $F = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ и $G = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$ и I означава јединичну матрицу истог реда као и F. Одредити матрицу

$$3F^{-1} + G \cdot (F + 2I)^{\mathrm{T}}.$$

3. У зависности од реалног параметра b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 6z & = & b \\ -2x & + & b \cdot y & + & 4z & = & b. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(3,1,-1)$, $B(\lambda,-3,1)$, $C(2,-1,1)$ и $D(2,-\lambda,2)$.

а) За коју вредност параметра λ су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ колинеарни?

б) За вредности параметра λ одређене под а) одредити однос површина троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$.

5. Дате су тачке Q, R, S и T, као и права p у простору:

$$Q(-1,0,1), \qquad R(-2,-3,1), \qquad S(5,4,3), \qquad T(4,2,5); \qquad p \colon \left\{ \begin{array}{r} 2x + y + z - 6 = 0 \\ x - y + 2z = 0. \end{array} \right.$$

а) Одредити једначину праве q која садржи тачке S и T, вектор правца $\vec{v}_q$ праве q, као и координате произвољне тачке $A \in q$ ($A \neq S$, $A \neq T$).

б) Одредити једначину равни π која је паралелна са правама p и q и садржи тачку Q, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$.

в) Одредити праву r која је нормална на раван π и садржи тачку R.

Ф I колоквијум из Математике 1 Ф

20. новембар 2010.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 5x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & f & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ f & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. За које вредности параметра f је $D \geqslant 0$?

3. У зависности од реалног параметра ϕ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & 3y & + & (\phi-5)z & + & (2-\phi)w & = & 0 \\ -2x & - & 2y & + & 4z & - & 2w & = & 0. \\ x & + & y & - & 2z & + & w & = & 0 \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(-1, 2, 2)$, $N(2\beta, 1, 3)$, $P(-2, 4, 5)$ и $Q(-4, 4, 3)$.

а) За коју вредност параметра β важи $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{11}$?

б) За вредности параметра β одређене под а) проверити да ли су тачке M, N, P, Q компланарне и уколико су тачке компланарне изразити вектор $\overrightarrow{MQ}$, преко вектора $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}$, а у супротном израчунати запремину пирамиде $MNPQ$.

5. Дате су тачке A, B, C и D, као и права p у простору:

$$A(4, 0, -2), \qquad B(3, 1, -1), \qquad C(2, 3, -2), \qquad D(-1, 0, 1); \qquad p\colon \begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + y + z - 10 = 0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину равни π која садржи тачке B, C и D, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$ $(M \neq B,\ M \neq C,\ M \neq D)$.

б) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и произвољну тачку P са ове праве $(P \in p)$.

в) Одредити праву q која је паралелна правој p и садржи тачку A.

г) Одредити раван α која је нормална на праву q и садржи тачку C.

Г **I колоквијум из Математике 1** Г

20. новембар 2010.

________________________________ ____________ _______

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ и $\circ$ дефинисана са

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - 3bd, ad + bc).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, \circ)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, \circ)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, \circ)$ Абелова група?

2. Нека су $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$ и I означава јединичну матрицу истог реда као и A.
Одредити матрицу

$$2A^{-1} + B^{\mathrm{T}} \cdot (A + 2I).$$

3. У зависности од реалног параметра γ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ -2x & + & \gamma \cdot y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & y & - & z & = & \gamma. \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(1, 0, \phi)$, $N(-1, 2, -1)$, $P(3, 2, 1)$ и $Q(4 - 2\phi, -1, 1)$.

а) За коју вредност параметра ϕ су вектори $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ колинеарни?

б) За вредности параметра ϕ одређене под а) одредити однос површина троуглова $\triangle MNP$ и $\triangle MPQ$.

5. Дате су тачке A, B, C и D, као и права p у простору:

$$A(-3, 1, 2), \qquad B(-4, -2, 2), \qquad C(2, 3, 6), \qquad D(3, 5, 4); \qquad p\colon \begin{cases} -4x + y - z - 9 = 0 \\ 2x + y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину праве q која садржи тачке C и D, вектор правца $\vec{v}_q$ праве q, као и координате произвољне тачке $M \in q$ ($M \neq C$, $M \neq D$).

б) Одредити једначину равни π која је паралелна са правама p и q и садржи тачку A, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $N \in \pi$.

в) Одредити праву r која је нормална на раван π и садржи тачку B.

Д I колоквијум из Математике 1 Д

20. новембар 2010.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = [5, +\infty)$ и $*$ дефинисана са

$$a * b = 2ab - 10(a+b) + 55.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$3A + X \cdot B = C^{\mathrm{T}}.$$

3. У зависности од реалног параметра d решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & d^2 + 4d - 7 \\ 3x & - & 6y & + & d \cdot z & = & 6 \\ -x & - & 2y & + & z & = & 6. \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(-1, 3-2\mu, 0)$, $N(1, -2, -1)$, $P(5, 8, 1)$ и $Q(-3, -4, 1+\mu)$.

а) За коју вредност параметра μ су вектори $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ колинеарни?

б) За вредности параметра μ одређене под а) одредити однос површина троуглова $\triangle MNQ$ и $\triangle NPQ$.

5. Дате су тачке A, B, C и D, као и права p у простору:

$$A(4, -3, -3), \qquad B(-1, -3, 0), \qquad C(2, 0, -3), \qquad D(3, -2, -2); \qquad p\colon \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 3x + 2y + z - 10 = 0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину равни π која садржи тачке B, C и D, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$ ($M \neq B$, $M \neq C$, $M \neq D$).

б) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и произвољну тачку P са ове праве ($P \in p$).

в) Одредити праву q која је паралелна правој p и садржи тачку A.

г) Одредити раван α која је нормална на праву q и садржи тачку C.

E # I колоквијум из Математике 1 **E**

20. новембар 2010.

презиме и име студента | **број индекса** | **група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице система

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & \varepsilon - 4 & -2\varepsilon - 8 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра ε.

3. У зависности од реалног параметра e решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 6y & + & (e+2)z & = & 0 \\ -2x & + & (e-1)y & + & 4z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & 0. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(1, 2, -1)$, $B(-1, 3 - 2\gamma, 0)$, $C(5, 2, 3)$ и $D(3, 1, 1 + \gamma)$.

а) За које вредности параметра γ важи $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

б) За вредности параметра γ одређене под а) проверити да ли су тачке A, B, C, D компланарне и уколико су тачке компланарне изразити вектор $\overrightarrow{AD}$, преко вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а у супротном израчунати запремину пирамиде $ABCD$.

5. Дате су тачке Q, R, S и T, као и права p у простору:

$$Q(0, 1, 2), \qquad R(-1, -2, 2), \qquad S(5, 3, 6), \qquad T(6, 5, 4); \qquad p\colon \begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + y + z - 10 = 0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину праве q која садржи тачке S и T, вектор правца $\vec{v}_q$ праве q, као и координате произвољне тачке $A \in q$ $(A \neq S,\ A \neq T)$.

б) Одредити једначину равни π која је паралелна са правама p и q и садржи тачку Q, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$.

в) Одредити праву r која је нормална на раван π и садржи тачку R.

Л **I колоквијум из Математике 1** Л

20. новембар 2010.

презиме и име студента | **број индекса** | **група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 2a & -2a & a \end{pmatrix} \quad : \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице система

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 & 2 - \lambda & \lambda^2 + 5 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра λ.

3. У зависности од реалног параметра L решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & (L-3) \cdot z & = & 0 \\ L \cdot x & - & 3y & + & 5z & = & 0. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(1, 0, 3)$, $B(2\lambda - 3, -3, 2)$, $C(3, 1, 0)$ и $D(1, 1 + 3\lambda, -2)$.

а) За коју вредност параметра λ су вектори $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ колинеарни?

б) За вредности параметра λ одређене под а) одредити однос површина троуглова $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$.

5. Дате су тачке Q, R, S и T, као и права p у простору:

$$Q(0, -2, 1), \qquad R(-1, -5, 1), \qquad S(6, 2, 3), \qquad T(5, 0, 5); \qquad p\colon \begin{cases} 2x + y + 2z - 4 = 0 \\ -4x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину праве q која садржи тачке S и T, вектор правца $\vec{v}_q$ праве q, као и координате произвољне тачке $A \in q$ ($A \neq S$, $A \neq T$).

б) Одредити једначину равни π која је паралелна са правама p и q и садржи тачку Q, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$.

в) Одредити праву r која је нормална на раван π и садржи тачку R.

M I колоквијум из Математике 1 M

20. новембар 2010.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = (3, +\infty)$ и $\circ$ дефинисана са

$$x \circ y = 2xy - 6(x+y) + 21.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, \circ)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, \circ)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, \circ)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$A \cdot X - 2B^{\mathrm{T}} = C.$$

3. У зависности од реалног параметра M решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 2y & - & z & + & w & = & 0 \\ 2x & + & (M-2)\cdot y & + & (M+4)\cdot z & - & 3w & = & -2 \\ 3x & + & 2y & + & 11z & - & 3w & = & 0. \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(2,0,5)$, $N(1+\delta, 2, 8)$, $P(1,-3,3)$ и $Q(3, 2\delta-2, 2)$.

а) За које вредности параметра δ важи $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{PQ}|$?

б) За вредности параметра δ одређене под а) проверити да ли су тачке M, N, P, Q компланарне и уколико су тачке компланарне изразити вектор $\overrightarrow{MQ}$, преко вектора $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}$, а у супротном израчунати запремину пирамиде $MNPQ$.

5. Дате су тачке A, B, C и D, као и права p у простору:

$$A(1,0,-2), \quad B(0,1,-1), \quad C(-1,3,-2), \quad D(-4,0,1); \qquad p\colon \left\{ \begin{array}{l} 3x+2y+z-7=0 \\ x+y \qquad -3=0. \end{array} \right.$$

а) Одредити једначину равни π која садржи тачке B, C и D, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$ ($M \neq B$, $M \neq C$, $M \neq D$).

б) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и произвољну тачку P са ове праве ($P \in p$).

в) Одредити праву q која је паралелна правој p и садржи тачку A.

г) Одредити раван α која је нормална на праву q и садржи тачку C.