A I колоквијум из Математике 1 A

19. новембар 2009.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ aI + bJ \mid a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & a & 8 \\ -1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$. За које вредности параметра a је $D = 0$?

3. У зависности од реалног параметра α решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ -x & - & y & + & z & = & -3 \\ 2x & + & 4y & + & \alpha \cdot z & = & 6 - \alpha \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 4. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(1, 3, -1)$, $B(3, 3, 1)$, $C(2, 1, \alpha)$ и $D(4, 4, -1)$.

а) Одредити вредности параметра α тако да запремина пирамиде $ABCD$ буде $\frac{5}{3}$.

б) За најмању вредност α одређену под а) израчунати меру угла $\sphericalangle ABC$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \frac{x-2}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+3}{1} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon x - y + 5z + 9 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

д) Уколико се права a и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β.

Б **I колоквијум из Математике 1** **Б**

19. новембар 2009.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и нека је

$$\mathcal{M} = \{aX + bY \mid a, b \in \mathbb{R},\ ab \neq 0\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & b & 5 \\ 2 & 0 & -2 & b \end{vmatrix}$. За које вредности параметра b је $D \neq 0$?

3. У зависности од реалног параметра β решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & 2z & + & w & = & 2 \\ 3x & + & 3y & + & (\beta-5)z & + & (2-\beta)w & = & \beta^2+5 \\ -2x & - & 2y & + & 4z & - & 2w & = & -4. \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(3,-1,1)$, $N(\beta,0,2)$, $P(3,-2,2)$ и $Q(5,-1,4)$.

а) Одредити вредности параметра β тако да запремина пирамиде $MNPQ$ буде $\frac{4}{3}$.

б) За највећу вредност β одређену под а) израчунати меру угла $\sphericalangle MNP$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon x + y + 3 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

д) Уколико се права a и раван β секу одредити величину угла φ између праве a и равни β, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β.

Φ I колоквијум из Математике 1 Φ

19. новембар 2009.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и нека је $*$ операција дефинисана са

$$(a,b) * (c,d) = (ad + bc,\, bd - ac).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група?

2. Нека су дате матрице $F = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ и $G = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ и I означава јединичну матрицу истог реда као и F.

Одредити матрицу

$$2F^{-1} + G \cdot (F - I)^T.$$

3. У зависности од реалног параметра f решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 6 \\ -2x & - & y & + & f \cdot z & = & f. \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(1,2,3)$, $N(3,1,\phi+1)$, $P(1,\phi+2,2)$ и $Q(3,-1,4)$.

а) За које вредности параметра ϕ су вектори $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$ компланарни.

б) За најмању вредност ϕ одређену под а) изразити вектор $\overrightarrow{MN}$ преко вектора $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ -x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon\ -x + 3y - z - 5 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

д) Уколико се права a и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β.

Г I колоквијум из Математике 1 Г

19. новембар 2009.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. Нека је $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и нека је $*$ операција дефинисана са

$$(x,y) * (u,v) = (xu - yv,\, yu + xv).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група?

2. Нека су дате матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Одредити матрицу

$$A^{-1} + B^T \cdot (A - 2I).$$

3. У зависности од реалног параметра γ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 6 \\ -2x & - & y & - & 3z & = & \gamma. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(-1,1,-1)$, $B(\gamma,1,0)$, $C(1,-2,-2)$ и $D(-5,\gamma+2,0)$.

а) За које вредности параметра γ су вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD}$ линеарно зависни.

б) За највећу вредност γ одређену под а) изразити вектор $\overrightarrow{CD}$ преко вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \begin{cases} x + 3y + 2z - 4 = 0 \\ -x - 4y + z + 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 2x + 7y + z + 2 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

д) Уколико се права a и раван β секу одредити величину угла φ између праве a и равни β, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β.

Д # I колоквијум из Математике 1 **Д**

19. новембар 2009.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $A = (-2, \infty)$ и нека је операција $*$ дефинисана са

$$x * y = 3xy + 6(x+y) + 10.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$A \cdot X + 2B \cdot X = C.$$

3. У зависности од реалног параметра d решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & + & (d-6)z & = & d+6 \\ -2x & - & 4y & + & 6z & = & -2. \end{array}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{m} = (3, 3, -2), \qquad \vec{n} = (1, 2\delta, 4), \qquad \vec{p} = (3, -3, 2) \qquad (\delta \in \mathbb{R}).$$

а) Одредити вредности параметра δ тако да вектори $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ буду линеарно зависни.

б) За највећу вредност δ одређену под а) изразити вектор $\vec{n}$ помоћу вектора $\vec{m}$ и $\vec{p}$.

5. Дате су права a и права b у простору:

$$a\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{4} \qquad \text{и} \qquad b\colon \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{1}.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор правца $\vec{v}_b$ праве b.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in b$.

в) Одредити међусобни положај праве a и праве b.

д) Уколико се права a и права b секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.

Е **I колоквијум из Математике 1** **Е**

19. новембар 2009.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M}=\left\{\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & b & -a\\ 0 & a & b\end{bmatrix};\ a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2\neq 0\right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M},\cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & \varepsilon & 8\\ -1 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1 & \varepsilon\end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра ε.

3. У зависности од реалног параметра e решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 2\\ -x & & & + & z & = & 2\\ 2x & + & 4y & + & (e-4)z & = & 10-e\\ 3x & + & y & - & 4z & = & 3.\end{array}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{a}=(4,2,3\varepsilon),\qquad \vec{b}=(1,-2,4),\qquad \vec{c}=(2,2,-1)\qquad (\varepsilon\in\mathbb{R}).$$

а) Одредити вредности параметра δ тако да вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ буду компланарни.

б) За највећу вредност ε одређену под а) изразити вектор $\vec{a}$ помоћу вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

5. Дате су 4 тачке у простору:

$$A(-3,-1,5),\qquad B(5,5,1),\qquad C(3,1,3),\qquad D(3,2,-1).$$

а) Одредити раван α је одређена тачкама A, B и C.

б) Одредити једначину нормале n из тачке D на раван α.

в) Одредити вектор правца $\vec{v}_n$ праве n и вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ на раван α.

д) Одредити растојање тачке D од равни α.

Л I колоквијум из Математике 1 Л

19. новембар 2009.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} x & -y & x \\ y & x & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & \lambda & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра λ.

3. У зависности од реалног параметра ℓ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & + & 3u & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 4z & + & 5u & = & 1 \\ -2x & + & (\ell-2)y & + & (4-2\ell)z & + & (10-4\ell)u & = & 2. \end{array}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}, \qquad \vec{b} = -2\vec{j} + 3\vec{k}, \qquad \vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \lambda\vec{k} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

а) Ако су вектори $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{a}$, одредити $\vec{u} \times \vec{v}$.

б) За коју вредност реалног параметра λ су вектори $\vec{c}$ и $\vec{u} \times \vec{v}$ колинеарни?

5. Дате су раван α и раван β у простору:

$$\alpha\colon x + 2y - z - 2 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon -x + y + z + 2 = 0.$$

а) Одредити вектор вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ на раван α и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај равни α и равни β.

д) Уколико се раван α и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.

M I колоквијум из Математике 1 M

19. новембар 2009.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је $A = (1, \infty)$ и нека је операција $*$ дефинисана са

$$x * y = 3xy - 3(x + y) + 4.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$A \cdot X = 2B \cdot X + C.$$

3. У зависности од реалног параметра m решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -2 \\ 2x & + & 4y & + & (m-5)z & = & -2m-6 \\ -2x & - & 3y & + & 4z & = & 2 \end{array}.$$

4. Дати су вектори

$$\vec{m} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \qquad \vec{n} = \vec{i} - 3\vec{k}, \qquad \vec{p} = 6\vec{i} + \mu\vec{j} + 2\vec{k} \qquad (\mu \in \mathbb{R}).$$

а) Ако су вектори $\vec{u} = \vec{m} - 3\vec{n}$ и $\vec{v} = \vec{n} + 2\vec{m}$, одредити $\vec{u} \times \vec{v}$.

б) За коју вредност реалног параметра μ су вектори $\vec{c}$ и $\vec{u} \times \vec{v}$ линеарно зависни?

5. Дате су раван α и раван β у простору:

$$\alpha\colon 2x - 4y - 8z + 5 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon \frac{x}{-4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1.$$

а) Одредити вектор вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ на раван α и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај равни α и равни β.

д) Уколико се раван α и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.

A Решења I колоквијума из Математике 1 A

1. Дати скуп матрица $\mathcal{M}$ је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}.$$

<u>Затвореност</u> важи:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$$

јер $a, b, c, d \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ ac - bd, ad + bc \in \mathbb{R}$. Остаје да покажемо да још ова 2 броја не могу истовремено бити једнаки 0. Претпоставимо супротно, да су оба једнака 0:

$$\begin{array}{rcrcl} ac & - & bd & = & 0 \\ ad & + & bc & = & 0. \end{array}$$

Ово је хомогени систем (по нпр. a и b) и он има јединствено тривијално решење $a = b = 0$, што је немогуће јер треба да важи $a^2 + b^2 \neq 0$. Тиме смо показали да $ac - bd$ и $ad + bc$ не могу истовремено бити једнаки 0, тј. тек сада смо пиоказали да је $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$.

Напомена 1. Да $ac - bd$ и $ad + bc$ не могу истовремено бити једнаки 0 можемо показати и посматрањем израза

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2),$$

који не може бити једнак 0, јер је $a^2 + b^2 \neq 0$ и $c^2 + d^2 \neq 0$.

Напомена 2. Ради краћег записа можемо означити $M(a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ и онда нпр. затвореност пишемо као $M(a, b) \cdot M(c, d) = M(ac - bd, ad + bc)$.

<u>Асоцијативност</u> се преноси (како је множење матрица асоцијативна операција у скупу Ω свих матрица облика 2×2 са реалним елементима то је множење матрица асоцијативно и у скупу $\mathcal{M} \subset \Omega$).

Други начин да покажемо асоцијативност би био:

$$\begin{aligned} M(a,b) \cdot \Big(M(c,d) \cdot M(f,g) \Big) &= M(a,b) \cdot M(cf - dg, cg + df) \\ &= M(a(cf - dg) - b(cg + df), a(cg + df) + b(cf - dg)) \\ &\overset{*}{=} M(acf - adg - bcg - bdf)) \\ &\overset{*}{=} M((ac - bd)f - (ad + bc)g, (ac - bd)g + (ad + bc)f) \\ &= M(ac - bd, ad + bc) \cdot M(f,g) = \Big(M(a,b) \cdot M(c,d) \Big) \cdot M(f,g) \end{aligned}$$

(овде смо у једнакостима $\overset{*}{=}$ користили асоцијативност, комутативност и дистрибутивност операција $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{R}$, а у осталим само затвореност).

<u>Неутрални елемент</u> овде ће бити јединична матрица јер $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = M(1, 0) \in \mathcal{M}$.

<u>Инверзни елемент</u> је онда инверзна матрица! Дакле инверзни елемент матрице $M(a, b)$ је матрица $M(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.

<u>Комутативност</u> важи (иако генерално множење матрица није комутативна операција у скупу $\mathcal{M}$ јесте!):

$$M(a, b) \cdot M(c, d) = M(ac - bd, ad + bc) \overset{*}{=} M(ca - db, cb + da) = M(c, d) \cdot M(a, b)$$

(овде смо у једнакости $\overset{*}{=}$ користили комутативност операција $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{R}$, а у осталим само затвореност).

На основу свега изложеног добијамо да је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ $\boxed{\text{група}}$ и то $\boxed{\text{Абелова група}}$.

2. Најлакше је дату детерминанту израчунати свођењем на детерминанту троугаоне матрице.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & a & 8 \\ -1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{IV} - \mathrm{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} + \mathrm{I} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & a-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(a-6)\cdot(a-3)$$

$\boxed{D = 2(a-6)(a-3) = 2a^2 - 18a + 36}$.

$D = 0$ је за $\boxed{a = 6}$ и за $\boxed{a = 3}$.

Напомена. Дату детерминанту смо могли израчунати и Лапласовим развојем по II колони јер она има највише елемената 0.

3. Систем не можемо решавати преко детерминанти (јер је систем од 4 једначине са 3 непознате), па ћемо га решавати Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & = & 4 & \\ -x & - & y & + & z & = & -3 & \mathrm{II} + \mathrm{I} \\ 2x & + & 4y & + & \alpha\cdot z & = & 6-\alpha & \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{I} \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 4 & \mathrm{IV} + \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & = & 4 & \\ & & y & & & = & 1 & \\ & & & & (\alpha+2)\cdot z & = & -2-\alpha & \\ & & 5y & - & 3z & = & 8 & \mathrm{IV} - 5\cdot\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & = & 4 & \\ & & y & & & = & 1 & \\ & & & - & 3z & = & 3 & \\ & & & & (\alpha+2)\cdot z & = & -2-\alpha & \mathrm{IV} + \frac{\alpha+2}{3}\cdot\mathrm{III} \end{array}$$

(овде смо и заменили последње 2 једначине)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ & & y & & & = & 1 \\ & & & - & 3z & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ & & y & & & = & 1 \\ & & & - & 3z & = & 3 \end{array}$$

Овај систем не зависи од параметра и увек има $\boxed{\text{јединствено решење } (x,y,z) = (1,1,-1)}$.

Напомена. И студенти који су разматрали 2 случаја: $\alpha = -2$ и $\alpha \neq -2$ и у оба добили јединствено решење $(x,y,z) = (1,1,-1)$ добили су све поене!

4. а) На основу $\overrightarrow{AB} = (2,0,2)$, $\overrightarrow{AC} = (1,-2,\alpha+1)$ и $\overrightarrow{AD} = (3,1,0)$ добијамо да је

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & \alpha+1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\,|12 - 2\alpha| = \frac{5}{3}.$$

Када решимо једначину са апсолутним вредностима $|12-2\alpha| = 10$ добијамо два решења $\boxed{x=1}$ и $\boxed{x=11}$.

Напомена 1. Честа грешка је била да се не стави апсолутна вредност у формули за запремину и онда се добијала само вредност $x = 1$. Такође један део студената је користио погрешну формулу за запремину пирамиде (без $\frac{1}{6}$ или са $\frac{1}{3}$ уместо $\frac{1}{6}$). Још једна грешка која се појављивала је да у формули за запремину не узмете 3 вектора који полазе из истог темена (попут $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ него нпр. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$)

б) У овом делу задатка узимамо мању од претходно одређених вредности, тј. $\alpha = 1$. На основу вектора $\overrightarrow{BA} = (-2, 0, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, -2, \alpha - 1) = (-1, -2, 0)$ добијамо да је вредност косинуса траженог угла

$$\cos \sphericalangle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

одакле налазимо тражену величину угла $\boxed{\sphericalangle ABC = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}}$.

Напомена 2. Интересантно је да се за величину угла $\sphericalangle BAC$ добија „лепа“ вредност: $\sphericalangle BAC = 45°$ (јер је $\cos(\sphericalangle BAC) = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

Напомена 3. Честе грешке у овом делу су биле да се стави погрешна вредност за α, као и да се користе вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (они одређују угао $\sphericalangle BAC$, а не $\sphericalangle ABC$!) или $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (они не одређују унутрашњи угао $\sphericalangle ABC$, него спољашњи угао код темена B, који је једнак $180° - \sphericalangle ABC$). Такође формула за $\cos\varphi$ у бројиоцу нема апсолутну вредност (ње нема да бисмо могли да добијемо тачну вредност угла и када је тај угао $90° < \varphi < 180°$).

5. а),б) Из једначине праве $a\colon \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z+3}{1}$ добијамо да је вектор правца праве a једнак $\boxed{\vec{v}_a = (-2, 3, 1)}$, као и тачку $\boxed{A(2, -4, -3)}$. Вектор нормале на раван $\beta\colon x - y + 5z + 9 = 0$ једнак је $\boxed{\vec{n}_\beta = (1, -1, 5)}$, а тачку добијамо када фиксирамо 2 координате (нпр. $y = z = 0$), а трећу израчунамо из једначине равни, нпр. $\boxed{B(-9, 0, 0)}$.

в) За међусобни положај праве и равни рачунамо скаларни производ

$$\vec{v}_a \cdot \vec{n}_\beta = -2 + (-3) + 5 = 0.$$

Како је $\vec{v}_a \cdot \vec{n}_\beta = 0$ добијамо да је $\vec{v}_a \perp \vec{n}_\beta$, тј. добијамо да су права a и раван β паралелне, $a \parallel \beta$ (или као специјални случај те паралелности да се права a налази у равни β). Потребно је још да видимо да ли се права a цела налази у равни β. То проверавамо тако што испитамо да ли једна њена тачка, нпр. A, припада равни β:

$$2 - (-4) + 5 \cdot 3 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad A \in \beta \quad \Rightarrow \quad a \in \beta,$$

тј. $\boxed{\text{права } a \text{ припада равни } \beta}$.

д) Раван β и права a се секу и пресек им је права $\boxed{a\colon \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z+3}{1}}$.

Напомена 1. Након што смо установили да је $a \parallel \beta$ могли смо на основу растојања

$$d(a, \beta) = d(A, \beta) = \frac{|2 - (-4) + 5 \cdot 3 + 9|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{0}{3\sqrt{3}} = 0$$

да видимо да је $a \in \beta$.

Напомена 2. Честе грешке су биле да користите векторски, а не скаларни производ за испитивање положаја праве и равни. Такође, велики број студената је одређивао растојање (и то често погрешно) уместо пресека праве a и равни β. Део студената је одређивао пресек праве a и равни β: параметарски облик $x = -2t+2$, $y = 3t-4$, $z = t-3$ праве убаци се у једначину равни $(-2t+2)-(3t-4)+5\cdot(t-3)+9 = 0$, што се своди се на једначину $0 = 0$ (која је бунила већи број студената). Како је то једначина по t њено решење је произвољан број $t \in \mathbb{R}$, тј. добијамо да је пресек дат са $x = -2t+2$, $y = 3t-4$, $z = t-3$, што је параметарски облик једначине праве a!