M A T E M A T I K A 1

Grupa: I Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ______________________________

Z A D A C I :

1. Ako je

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ t\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbf{Q} \ \wedge \ s \neq 0 \ \wedge \ s - t = 1 \right\}$$

i operacija $*$ množenje matrica, ispitati da li je $(A, *)$ grupa. Da li je $(A, *)$ Abelova grupa?

2. U zavisnosti od realnih parametara p i q diskutovati i rešiti sistem lineranih jednačina:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & 2 \\ 6x & + & 4y & + & pz & + & qu & = & 3 \\ 6x & + & 8y & + & 2pz & + & (2q+3)u & = & q+4 \end{array}$$

3. Date su prave $p : \begin{cases} x + y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$, $s : \dfrac{x-2}{\lambda} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-5}{1}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ i ravan $\gamma : x + y + z + 1 = 0$.

a) Odrediti vrednost realnog parametra λ za koji se prave p i s seku, i za tako određenu vrednost paramtera λ izračunati rastojanje presečne tačke datih pravih od ravni γ.

b) Odrediti jednačinu prave r koja sadrži tačku $R(1, 2, 3)$, seče pravu p i paralelna je ravni γ.

MATEMATIKA 1

Grupa: II Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ______________________________

ZADACI:

1. Ako je

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x+y & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R} \right\}$$

i operacija $*$ množenje matrica, ispitati da li je operacija $*$ zatvorena u M. Da li je $(M, *)$ grupa? Da li je $(M, *)$ Abelova grupa?

2. Odrediti rang matrice K u zavisnosti od realnih parametara a i b:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 11 & b-4 & 1 & 7 \\ 5 & 30 & 3b-10 & 3 & 23 \\ 2 & 1 & a-b-3 & 3 & ab-12 \end{bmatrix}$$

3. Date su prave $p : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+7}{12}$ i $q : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-10}{5}$ i tačka $S(1, -2, 0)$.

a) Ispitati međusobni položaj pravih p i q. Ukoliko se seku odrediti njihovu presečnu tačku, u suprotnom odrediti rastojanje između njih.

b) Odrediti jednačinu ravni π koja sadrži tačku S, koordinatni početak i paralelna je pravoj p, a zatim odrediti ortogonalnu projekciju prave p na ravan π.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: III Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ______________________________

Z A D A C I :

1. Ako je

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{Q} \ \wedge \ x \neq 0 \ \wedge \ x - y = 1 \right\}$$

i operacija $\star$ množenje matrica, ispitati da li je $(M, \star)$ grupa. Da li je $(M, \star)$ Abelova grupa?

2. Neka su dati vektori $\overrightarrow{a} = (8, 1, 1, 0)$, $\overrightarrow{b} = (13, 3, 6, -1)$, $\overrightarrow{c} = (3, 0, \lambda, 2)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ i $\overrightarrow{d} = (1, 0, 0, -1)$ u vektorskom prostoru $V = (\mathbf{R}^4, \mathbf{R}, +, \cdot)$.

a) Odrediti sve vrednosti realnog parametra λ za koje vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ i $\overrightarrow{d}$ čine bazu datog vektorskog prostora.

b) Za $\lambda = -1$ ispitati da li dati vektori čine bazu vektorskog prostora V. Ukoliko čine odrediti koordinate vektora $(-24, -7, -17, 9)$ u toj bazi, u suprotnom predstaviti vektor $\overrightarrow{a}$ kao lineranu kombinaciju preostala tri vektora.

3. Date su prave $p : \begin{cases} x + 3y + z + 15 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$, $r : \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$ i ravan $\alpha : x + y + z - 7 = 0$.

a) Ispitati međusobni položaj prave r i ravni α. Ukoliko su paralelne odrediti pravu koja je simetrična pravoj r u odnosu na ravan α. U suprotnom, odrediti jednačinu prave koja je paralelna pravoj p i sadrži prodornu tačku prave r kroz α.

b) Odrediti jednačinu prave a koja sadrži tačku $A(1, -2, 2)$, seče pravu p i paralelna je ravni α.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: IV

Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ______________________________

Z A D A C I :

1. Ako je

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 & q \\ 0 & p+q & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix} \;\middle|\; p, q \in \mathbf{R} \;\wedge\; |p| \neq |q| \right\}$$

i operacija $\circ$ množenje matrica, ispitati da li je operacija $\circ$ zatvorena u P. Da li je $(P, \circ)$ grupa? Da li je $(P, \circ)$ Abelova grupa?

2. Neka su date matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ i $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Rešiti matričnu jednačinu

$$(MXP)^{-1} = P^{-1}(X^{-1} + P^{-1})$$

3. Date su prave $p : \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-12}{-1}$ i $q : \dfrac{x-3}{-7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ i tačka $T(1, 2, 3)$.

a) Ispitati međusobni položaj pravih p i q. Ukoliko se seku odrediti njihovu presečnu tačku, u suprotnom odrediti rastojanje između njih.

b) Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži tačku T, koordinatni početak i paralelna je pravoj q, a zatim odrediti ortogonalnu projekciju prave q na ravan α.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: V Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ____

Z A D A C I :

1. Ako je

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 3b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$$

i operacija $*$ množenje matrica, ispitati da li je $(C, *)$ grupa. Da li je $(C, *)$ Abelova grupa?

2. U zavisnosti od realnih parametara k i s diskutovati i rešiti sistem lineranih jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcl} kx & - & y & + & 3z & = & 2 \\ (1-2k)x & + & 2y & - & z & = & s \\ -kx & & & + & z & = & k \end{array}$$

3. Neka su date prave $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-4}{a}$, $a \in \mathbf{R}$, $q : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ i ravan $\alpha : 3x - y + 6 = 0$.

a) Odrediti vrednost realnog parametra a tako da se prave p i q seku, a zatim za tako određenu vrednost parametra a, odrediti jednačinu ravni koja sadrži date prave.

b) Ispitati međusobni položaj prave q i ravni α. Ukoliko su paralelne, odrediti ortogonalnu projekciju prave q na ravan α, u suprotnom odrediti jednačinu prave koja pripada ravni α i seče pravu q pod pravim uglom.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: VI Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ______________________________

Z A D A C I :

1. Ako je

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a-b & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$$

i operacija $\bullet$ množenje matrica, ispitati da li je operacija $\bullet$ zatvorena u K. Da li je $(K, \bullet)$ grupa? Da li je $(K, \bullet)$ Abelova grupa?

2. Odrediti rang matrice S u zavisnosti od realnih parametara a i b:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -7 & 1 & 3 & -5 \\ -9 & -36 & 17 & a+15 & -22 \\ 5 & 16 & 1 & b-5 & ab+19 \end{bmatrix}$$

3. Date su prave $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-\lambda}{2}$ i $q : \dfrac{x-\lambda}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-6}{1}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ i tačka $M(5, -4, -8)$.

a) Odrediti vrednost realnog parametra λ za koji se prave p i q seku. Za tako određenu vrednost parametra λ odrediti jednačinu ravni π koja sadrži date prave.

b) Za $\lambda = 0$, odrediti koordinate tačke koja je simetrična tački M u odnosu na pravu p.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: VII Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ____

Z A D A C I :

1. Ako je

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} k & m \\ 7m & k \end{bmatrix} \mid k, m \in \mathbf{Q} \right\}$$

i operacija $\bullet$ množenje matrica, ispitati da li je $(S, \bullet)$ grupa. Da li je $(S, \bullet)$ Abelova grupa?

2. Neka su dati vektori $\overrightarrow{e_1} = (-2, -2, -1, 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, 3, \lambda, 1)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\overrightarrow{e_3} = (1, 1, -1, 0)$ i $\overrightarrow{e_4} = (1, 0, -2, 1)$ u vektorskom prostoru $V = (\mathbf{R}^4, \mathbf{R}, +, \cdot)$.

a) Odrediti sve vrednosti realnog parametra λ za koje dati vektori čine bazu vektorskog prostora V.

b) Za $\lambda = -1$ ispitati da li dati vektori čine bazu vektorskog prostora V. Ukoliko čine odrediti koordinate vektora $(-8, -7, 4, -2)$ u toj bazi, u suprotnom predstaviti vektor $\overrightarrow{e_1}$ kao lineranu kombinaciju preostala tri vektora.

3. Neka su date prave $a : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{m} = \dfrac{z+1}{2}$, $m \in \mathbf{R}$, $b : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-3}{2}$ i ravan $\pi : 2x + 3y + pz + 1 = 0$, $p \in \mathbf{R}$.

a) Odrediti vrednost realnog parametra m tako da se prave a i b seku, a zatim za tako određenu vrednost parametra m, odrediti kanonski oblik jednačine prave koja seče date prave pod pravim uglom.

b) Odrediti vrednost realnog parametra p tako da prava b bude paralelna ravni π, a zatim za tako određenu vrednost parametra p odrediti ortogonalnu projekciju prave b na ravan π kao i rastojanje između njih.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: VIII Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ______________________________

Z A D A C I :

1. Ako je

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x-y & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{Q} \ \wedge \ |x| \neq |y| \right\}$$

i operacija $\star$ množenje matrica, ispitati da li je operacija $\star$ zatvorena u A. Da li je $(A, \star)$ grupa? Da li je $(A, \star)$ Abelova grupa?

2. Neka su date matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Rešiti matričnu jednačinu

$$(AX)^{-1} - \frac{1}{5}C^{-1} = 2X^{-1}$$

3. Date su prave $a : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ i $b : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ i tačka $M(2, -10, 4)$.

a) Odrediti vrednost realnog parametra λ za koji se prave a i b seku. Za tako određenu vrednost parametra λ odrediti jednačinu ravni π koja sadrži date prave.

b) Odrediti koordinate tačke koja je simetrična tački M u odnosu na pravu a.