I Писмени испит из математике 1 I

27.1.2015.

I група

презиме и име студента **број индекса**

1. Нека су дате су матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. Решити матричну једначину

$$(X^T A^{-1})^{-1} - 2A = B.$$

2. Нека су дате праве $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+3}{-7}$ и $q : \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$

а) Испитати међусобни положај правих p и q. Уколико се секу одредити пресечну тачку, у супротном одредити растојање између њих.

б) На правој p одредити тачке чије растојање од равни $\alpha : x+y+z-3=0$ износи $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

3. Нека је $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$, $g(x) = e^{-\frac{x}{3}}$ и $h(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$.

а) Апроксимирати функције $f(x)$ и $g(x)$ Маклореновим полиномима трећег степена, а функцију $h(x)$ Тејлоровим полиномом трећег степена у околини тачке $x_0 = 1$.

б) Израчунати

$$\lim_{x\to 0} \frac{8\sqrt{1+\sin x} + 18e^{-\frac{x}{3}} - 26 + 2x}{x^3}.$$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - x}.$$

5. Нека је општи члан низа дат са $a_n = \dfrac{3^n}{(n+2)!}$.

а) Испитати монотоност и ограниченост низа.

б) Одредити граничну вредност низа (a_n).

НАПОМЕНА: Кандидати који полажу писмени испит раде 1, 2, 3. и 4. задатак. Кандидати који полажу 2. колоквијум раде 3,4 и 5. задатак.

II Писмени испит из математике 1 II

27.1.2015.

II група

презиме и име студента **број индекса**

1. У зависности од реалног параметра a дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 5y & + & (a-3)z & = & -2 \\ x & + & 3y & + & 6z & = & 10 \\ 4x & + & ay & + & 5z & = & 13. \end{array}$$

2. Дате су праве $p\colon \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z+3}{-2}$ и $q\colon \dfrac{x-21}{6} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z-2}{-1}$

а) Испитати међусобни положај правих p и q. Уколико се секу одредити једначину равни која их садржи, у супротном одредити растојање између њих.

б) Одредити тачку симетричну тачки $S(1,0,1)$ у односу на праву p.

3. Нека је општи члан низа дат са $a_n = \dfrac{4^{n+1}}{(n+2)!}$.

а) Испитати монотоност и ограниченост низа.

б) Одредити граничну вредност низа (a_n).

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

5. Нека је $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \cos(1-\cos x)$ и $h(x) = \ln(1+2x^2)$.

а) Функцију $f(x)$ апроксимирати Тејлоровим полиномом трећег степена у околини тачке $x_0 = 1$, а функције $g(x)$ и $h(x)$ Маклореновим полиномима четвртог степена.

б) Одредити вредност реалног параметра Δ за који је функција

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(1-\cos x) + \ln(1+2x^2) - 1 - 2x^2}{x^4}, & x \neq 0 \\ \Delta, & x = 0 \end{cases}$$

непрекидна на $\mathbb{R}$.

НАПОМЕНА: Кандидати који полажу писмени испит раде 1, 2, 3. и 4. задатак. Кандидати који полажу 2. колоквијум раде 3,4 и 5. задатак.

III Писмени испит из математике 1 III

27.1.2015.

III група

презиме и име студента **број индекса**

1. Нека је $\mathcal{M} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 = 1\}$ и $*$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a, b) * (c, d) = (ac + bd, ad + bc),$$

за све $(a, b), (c, d) \in \mathcal{M}$. Испитати да ли је $(\mathcal{M}, *)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. У зависности од реалног параметра p дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 6z & = & 10 \\ 2x & - & 5y & + & (p-3)z & = & -2 \\ 4x & + & py & + & 5z & = & 13. \end{array}$$

3. Нека је $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$, $g(x) = e^{-\frac{x}{3}}$ и $h(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$.

а) Апроксимирати функције $f(x)$ и $g(x)$ Маклореновим полиномима трећег степена, а функцију $h(x)$ Тејлоровим полиномом трећег степена у околини тачке $x_0 = 1$.

б) Израчунати

$$\lim_{x \to 0} \frac{8\sqrt{1 + \sin x} + 18e^{-\frac{x}{3}} - 26 + 2x}{x^3}.$$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x + 2}.$$

5. Нека је општи члан низа дат са $a_n = \dfrac{3^n}{(n + 2)!}$.

а) Испитати монотоност и ограниченост низа.

б) Одредити граничну вредност низа (a_n).

НАПОМЕНА: Кандидати који полажу писмени испит раде 1, 2, 3. и 4. задатак. Кандидати који полажу 2. колоквијум раде 3,4 и 5. задатак.

IV Писмени испит из математике 1 IV

27.1.2015.

IV група

презиме и име студента **број индекса**

1. Нека су дате су матрице $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $M = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 7 \\ 6 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Решити матричну једначину

$$-3C + (M^{-1}X^T)^{-1} = M.$$

2. Дата је права p: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ и тачке $A(1,1,4)$, $B(2,0,1)$ и $C(0,0,3)$. Нека је α раван која садржи тачке A, B и C.

а) Одредити нормалну пројекцију праве p на раван α.

б) На правој p одредити тачке чије растојање од равни α износи $\frac{7}{\sqrt{6}}$.

3. Нека је $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \cos(1-\cos x)$ и $h(x) = \ln(1+2x^2)$.

а) Функцију $f(x)$ апроксимирати Тејлоровим полиномом трећег степена у околини тачке $x_0 = 1$, а функције $g(x)$ и $h(x)$ Маклореновим полиномима четвртог степена.

б) Одредити вредност реалног параметра Δ за који је функција

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(1-\cos x) + \ln(1+2x^2) - 1 - 2x^2}{x^4}, & x \neq 0 \\ \Delta, & x = 0 \end{cases}$$

непрекидна на $\mathbb{R}$.

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

5. Нека је општи члан низа дат са $a_n = \dfrac{4^{n+1}}{(n+2)!}$.

а) Испитати монотоност и ограниченост низа.

б) Одредити граничну вредност низа (a_n).

НАПОМЕНА: Кандидати који полажу писмени испит раде 1, 2, 3. и 4. задатак. Кандидати који полажу 2. колоквијум раде 3,4 и 5. задатак.