A **I колоквијум из ДМС-а** **A**

I колоквијум из ДМС-а
ФОН, 19.04.2015.

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Ана, Бока, Цеца и Дана су 4 студенткиње ФОН-а и свака од њих тренира тачно један спорт – кошарку или одбојку. Дате су следеће реченице:

I Дана игра одбојку или Бока и Цеца тренирају различите спортове.

II Дана и Бока играју кошарку или није тачно да ако Цеца игра кошарку онда бар једна од Ане и Боке игра кошарку.

III Дана и Цеца тренирају исти спорт или ако Бока игра кошарку онда и Цеца игра кошарку.

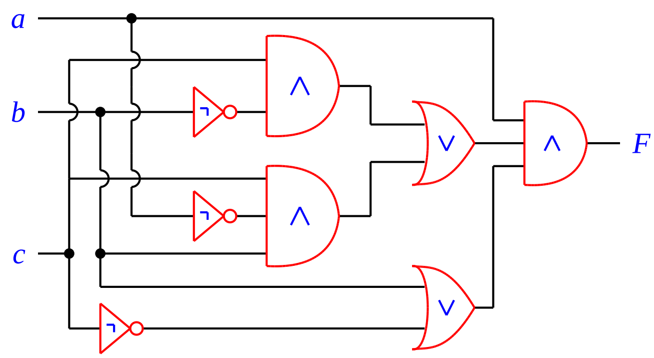
IV Обе Ана и Бока играју кошарку или Цеца игра кошарку; Дана и Бока се баве истим спортом.

а) Да ли су ове реченице непротивречне? Да ли међу њима има логички еквивалентних реченица?

б) За сваку исказну формулу $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (редом одговарају I,II,III,IV реченици) одредити једну КНФ или једну ДНФ. Да ли је нека од ових формула таутологија или контрадикција?

в) За кога од њих можете са сигурношћу тврдити којим се спортом бави?

2. а) Одредити исказну формулу F која одговара датом колу.



б) Испитати да ли је F таутологија или контрадикција.
в) Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ?
г) Представити F у једној КНФ и једној ДНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big(\big(\exists y)\,\alpha\big(x, f(y,z)\big) \vee \beta(z,a) \;\Rightarrow\; \beta(x,y) \wedge (\exists y)\,\alpha\big(f(x,y), z\big)\Big),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $a\colon 4$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon \geqslant$, $f\colon -$ у зависности од валуације слободних променљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{8, 11, 400, 484, 1000, 8888\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\; x\,\varrho\,y \;\overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\; \text{збир цифара броја } y \text{ дели збир цифара броја } x.$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Б **I колоквијум из ДМС-а** Б

ФОН, 19.04.2015.

____ ____________

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Пера, Рака, Сава и Тома су 4 студента ФОН-а и свако од њих тренира тачно један спорт – фудбал или рукомет. Дате су следеће реченице:

I Тома и Рака играју фудбал или није тачно да ако Сава игра фудбал онда бар један од Пере и Раке игра фудбал.

II Тома и Сава тренирају исти спорт или ако Рака игра фудбал онда и Сава игра фудбал.

III Обојица Пера и Рака играју фудбал или Сава игра фудбал; Тома и Рака се баве истим спортом.

IV Тома игра рукомет или Рака и Сава тренирају различите спортове.

а) Да ли су ове реченице непротивречне? Да ли међу њима има логички еквивалентних реченица?

б) За сваку исказну формулу $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (редом одговарају I,II,III,IV реченици) одредити једну КНФ или једну ДНФ. Да ли је нека од ових формула таутологија или контрадикција?

в) За кога од њих можете са сигурношћу тврдити којим се спортом бави?

2. Дата је скуповна формула F:

$$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \cup (A \cap B) = C \cup (A \cap B) \setminus (A \vartriangle B),$$

где $A \vartriangle B$ представља симетричну разлику скупова A и B.

а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.

б) Представити F преко исказних формула.

в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).

г) Представити исказну формулу и њену десну страну у једној СДНФ или једној СКНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big(\beta(x,y) \wedge (\exists y)\,\alpha\big(f(x,y),z\big) \;\Leftrightarrow\; (\exists y)\,\alpha\big(y, f(x,z)\big) \vee \beta(z,a)\Big),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $a\colon \emptyset$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon \subseteq$, $f\colon \cup$, у зависности од валуације слободних промењљивих.

4. Означимо са $zcb(t)$ збир цифара броја t. Нека је дат скуп $X = \{1, 4, 8, 10, 11, 13\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\; x\,\varrho\,y \;\overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\; \text{број 6 дели } zcb(x^2) - zcb(y^2).$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Г

I колоквијум из ДМС-а
ФОН, 19.04.2015.

Г

Презиме и име студента | бр. индекса

1. Маја, Нина и Оља су 3 студенткиње ФОН-а и свака од њих тренира тачно један спорт – кошарку или одбојку. Дате су следеће реченице:

I Маја и Оља тренирају исти спорт или ако Нина игра кошарку онда Оља игра кошарку.

II Обе Маја и Нина играју кошарку или Оља игра кошарку; Маја и Нина се баве истим спортом.

III Маја игра одбојку или Нина и Оља тренирају различите спортове.

IV Маја и Нина играју кошарку или није тачно да ако Оља игра кошарку онда бар једна од Маје и Нине игра кошарку.

а) Да ли су ове реченице непротивречне? Да ли међу њима има логички еквивалентних реченица?

б) За сваку исказну формулу $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (редом одговарају I,II,III,IV реченици) одредити једну КНФ или једну ДНФ. Да ли је нека од ових формула таутологија или контрадикција?

в) За кога од њих можете са сигурношћу тврдити којим се спортом бави?

2. Дата је скуповна формула F:

$$(A \vartriangle B \setminus D) \cup (B \cap C) \subseteq A \cup C \cup (B \cap D),$$

где $A \vartriangle B$ представља симетричну разлику скупова A и B.

а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.

б) Представити F преко исказних формула.

в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).

г) Представити исказну формулу и њену десну страну у једној СДНФ или једној СКНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big(\beta(x,y) \wedge (\exists y)\,\alpha\big(f(x,y),z\big) \;\Leftrightarrow\; (\exists y)\,\alpha\big(x, f(y,z)\big) \vee \beta(z,a)\Big),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{N}_0$, $a\colon 7$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon \geqslant$, $f\colon -$ у зависности од валуације слободних променљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{4, 11, 39, 100, 102, 221\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\; x\,\varrho\,y \;\overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\; \text{збир цифара броја } x \text{ дели збир цифара броја } y.$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

I колоквијум из ДМС-а
ФОН, 19.04.2015.

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Јоца, Коле и Лале су 3 студента ФОН-а и свако од њих тренира тачно један спорт – фудбал или рукомет. Дате су следеће реченице:

I Обојица Јоца и Коле играју фудбал или Лале игра фудбал; Јоца и Коле се баве истим спортом.

II Јоца игра рукомет или Коле и Лале тренирају различите спортове.

III Јоца и Коле играју фудбал или није тачно да ако Лале игра фудбал онда бар један од Јоце и Колета игра фудбал.

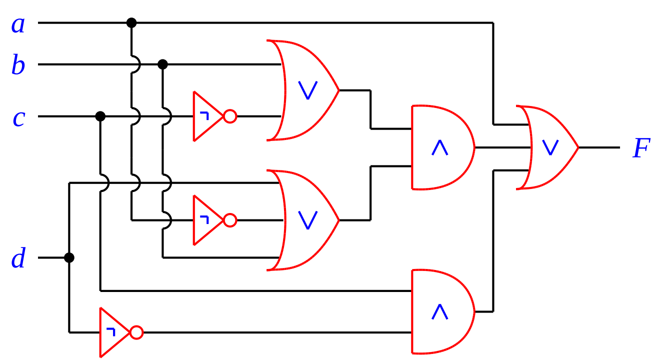
IV Јоца и Лале тренирају исти спорт или ако Коле игра фудбал онда и Лале игра фудбал.

а) Да ли су ове реченице непротивречне? Да ли међу њима има логички еквивалентних реченица?

б) За сваку исказну формулу $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (редом одговарају I,II,III,IV реченици) одредити једну КНФ или једну ДНФ. Да ли је нека од ових формула таутологија или контрадикција?

в) За кога од њих можете са сигурношћу тврдити којим се спортом бави?

2. а) Одредити исказну формулу F која одговара датом колу.



б) Испитати да ли је F таутологија или контрадикција.
в) Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ?
г) Представити F у једној КНФ и једној ДНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big((\exists y)\,\alpha\big(y, f(x,z)\big) \vee \beta(z,a) \;\Rightarrow\; \beta(x,y) \wedge (\exists y)\,\alpha\big(f(x,y),z\big)\Big),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $a\colon \emptyset$, $\alpha\colon\; =$, $\beta\colon\; \subseteq$, $f\colon \cup$, у зависности од валуације слободних променљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{6, 18, 22, 29, 61, 64\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\; x\,\varrho\,y \;\overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\; \text{збир цифара броја } x \text{ дели збир цифара броја } y.$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Решења групе А

1. а) a = „Ана тренира кошарку“ ($\neg a$ = „Ана тренира одбојку“), b = „Бока тренира кошарку“, c = „Цеца тренира кошарку“, d = „Дана тренира кошарку“.

$\mathrm{I} = \neg d \vee (b \veebar c)$, $\varphi = \mathrm{II} = d \wedge b \vee \neg(c \Rightarrow a \vee b)$, $\mathrm{III} = (d \Leftrightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$, $\mathrm{IV} = a \wedge b \vee c \wedge (d \Leftrightarrow b)$,

$F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}$.

						I	p		q		II	r	s	III		t	v	IV	
a	b	c	d	$\neg d$	$b \veebar c$	$\neg d \vee (b \veebar c)$	$d \wedge b$	$a \vee b$	$c \Rightarrow a \vee b$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$d \Leftrightarrow c$	$b \Rightarrow c$	$r \vee s$	$a \wedge b$	$a \wedge b \vee c$	$d \Leftrightarrow b$	$t \wedge v$	F
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Изјаве су непротивречне (има једна 1 у последњој колони F).

Како међу колонама у таблици које одговарају I, II, III и IV реченици нема две исте, то су међу датим реченицама нема логички еквивалентних.

б) Ниједна од ових формула није ни таутологија ни контрадикција (јер се у колонама које одговарају њима јављају и 1 и 0).

СКНФ: $\varphi_1 = (a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d)$.

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и једноставнији израз: $\varphi_1 = (b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)$.

СДНФ: $\varphi_2 = (\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d) \vee (a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge \neg d)$.

За ДНФ можемо узети горњу СДНФ, али и једноставнији израз: $\varphi_2 = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (b \wedge d)$.

СКНФ: $\varphi_3 = (a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d)$.

За КНФ ћемо узети горњу СКНФ.

СДНФ: $\varphi_4 = (\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d) \vee (a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee (a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge \neg d)$.

За ДНФ ћемо узети горњу СДНФ.

в) Како је $F = 1$ само у случају $a = b = d = 0$ и $c = 1$, добијамо да Ана, Бока и Дана тренирају одбојку, а Цеца кошарку.

2. а) $F = a \wedge \big((c \wedge \neg b) \vee (c \wedge \neg a \wedge b)\big) \wedge (b \vee \neg c)$ која одговара датом колу.

б) F није таутологија (у последњој колони има 0), али јесте контрадикција (јер су све 0).

						p	q	II	III	F
a	b	c	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$c \wedge \neg b$	$c \wedge \neg a \wedge b$	$p \vee q$	$b \vee \neg c$	$a \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III}$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0

в) F не представља ни КНФ, ни ДНФ (самим тим ни СКНФ ни СДНФ), јер је средњи део ове формуле једна формула у ДНФ $\big((c \wedge \neg b) \vee (c \wedge \neg a \wedge b)\big)$ спојена коњункцијама са литералом a и дисјунктом $(b \vee \neg c)$.

г) Како је F идентички једнака 0, она нема СДНФ, али има и КНФ и ДНФ.
Како је $F = 0$, можемо узети да је $F = a \wedge \neg a$, што је и КНФ као конјункција дисјункната (литерала) и ДНФ јер конјункт.

3. Формула је $\underline{(\forall x \in \mathbb{N})}\Big(\underline{(\exists y \in \mathbb{N})}\, x = y - z \vee z \geqslant 4 \;\Rightarrow\; x \geqslant y \wedge \underline{(\exists y \in \mathbb{N})}\, x - y = z\Big)$,

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(y, z)$.

Формула $(\exists y \in \mathbb{N})\, x = y - z$ је увек тачна (1), јер за све природне бројеве x и z постоји природан број $y = x + z$.
Формула $(\exists y \in \mathbb{N})\, x - y = z$ еквивалентна је са $x > z$, јер је $y = x - z \in \mathbb{N}$ (и тад постоји) само ако је $x > z$.

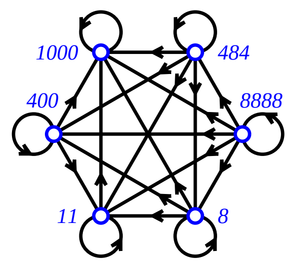
Како је $1 \vee p = 1$, формула у загради се своди на $1 \;\Rightarrow\; x \geqslant y \wedge x > z$, што је исто што и $x \geqslant y \wedge x > z$.

Даље, полазна формула $F = (\forall x \in \mathbb{N})\, x \geqslant y \wedge x > z$ је нетачна, јер за $x = 1$ имамо да $x = 1 > z \in \mathbb{N}$ није тачно, тј. $v(F) = 0$

4. За дате бројеве је збир цифара: $zcb(8) = 8$, $zcb(11) = 2$, $zcb(400) = 4$, $zcb(484) = 16$, $zcb(1000) = 1$, $zcb(8888) = 32$. Обратите пажњу да збир цифара другог броја y треба да дели збир цифара првог броја x, тј. $zbc(y) \mid zbc(x)$.

а)

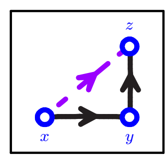
ϱ	8	11	400	484	1000	8888
8	1	1	1	0	1	0
11	0	1	0	0	1	0
400	0	1	1	0	1	0
484	1	1	1	1	1	0
1000	0	0	0	0	1	0
8888	1	1	1	1	1	1

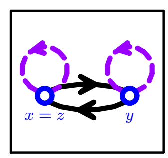


б) Јесте **P** јер сваки збир цифара дели самог себе, а и на главној дијагонали таблице имамо све 1, а и у графу око сваког чвора има петља.

Није **C**, јер $8\,\varrho\,11 \;\Rightarrow\; 11\,\varrho\,8$ $\lightning$.

Јесте **AC**, јер међу елементима симетричним у односу на главну дијагоналу таблице нема две 1, а и између свака 2 различита чвора у графу постоји или 0 или 1 грана.

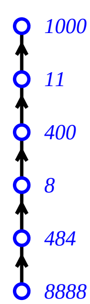
Јесте **T** (јер у графу нема ниједне од 2 ситуације које кваре **T**: 



).

г) Није релација еквиваленције, јер није **C**. Јесте релација поретка, јер је **P**, **AC** и **T**.

д) Ово је релација тоталног поретка, јер њен Хасеов дијаграм приказан на наредној слици јесте ланац. Такође, исти закључак можемо добити јер су свака 2 различита чвора спојена тачно 1 граном.



Најмањи елемент је 8888, јер је он у релацији са свим осталим (у таблици у врсти која одговара 8888 су све 1; у графу из 8888 води грана у све чворове; на Хасеовом дијаграму из 8888 води пут у све остале чворове), па је он и једини минимални елемент.

Највећи елемент је 1000, јер је са њим у релацији сви остали (у таблици у врсти која одговара 1000 су све 1; у графу у 1000 води грана из свих чворова; на Хасеовом дијаграму у 1000 води пут из свих осталих чворове), па је он и једини максимални елемент.

Решења групе Б

1. а) p = „Пера тренира фудбал" ($\neg p$ = „Пера тренира рукомет"), r = „Рака тренира фудбал", s = „Сава тренира фудбал", t = „Тома тренира фудбал".

$\varphi = \mathrm{I} = t \wedge r \vee \neg(s \Rightarrow p \vee r)$, $\mathrm{II} = (t \Leftrightarrow s) \vee (r \Rightarrow s)$, $\mathrm{III} = p \wedge r \vee s \wedge (t \Leftrightarrow r)$, $\mathrm{IV} = \neg t \vee (r \veebar s)$,

$F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}$.

				a		b		I	c	d	II		e	f	III			IV	
p	r	s	t	$t \wedge r$	$p \vee r$	$s \Rightarrow p \vee r$	$\neg b$	$a \vee \neg b$	$t \Leftrightarrow s$	$r \Rightarrow s$	$c \vee d$	$p \wedge r$	$p \wedge r \vee s$	$t \Leftrightarrow r$	$e \wedge f$	$\neg t$	$r \veebar s$	$\neg t \vee (r \veebar s)$	F
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Изјаве су непротивречне (има бар једна 1 у последњој колони, тј. има две 1 у F).

Како међу колонама у таблици које одговарају I, II, III и IV реченици нема две исте, то су међу датим реченицама нема логички еквивалентних.

б) Ниједна од ових формула није ни таутологија ни контрадикција (јер се у колонама које одговарају њима јављају и 1 и 0).

СДНФ: $\varphi_1 = (\neg p \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge s \wedge t) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge r \wedge s \wedge \neg t) \vee (p \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (p \wedge r \wedge s \wedge \neg t)$.

За ДНФ можемо узети горњу СДНФ, али и једноставнији израз: $\varphi_1 = (\neg p \wedge \neg r \wedge s) \vee (r \wedge t)$.

СКНФ: $\varphi_2 = (p \vee \neg r \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s \vee \neg t)$.

За КНФ ћемо узети горњу СКНФ.

СДНФ: $\varphi_3 = (\neg p \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge r \wedge s \wedge \neg t) \vee (p \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg t) \vee (p \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (p \wedge r \wedge s \wedge \neg t)$.

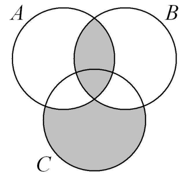
За ДНФ ћемо узети горњу СДНФ.

СКНФ: $\varphi_4 = (p \vee r \vee s \vee \neg t) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t) \wedge (\neg p \vee r \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t)$.

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и једноставнији израз: $\varphi_4 = (r \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee \neg t)$.

в) Како је $F = 1$ само у случају $p = r = t = 0$ и $s = 1$, добијамо да Пера, Рака и Тома тренирају рукомет, а Сава фудбал.

2. а) И лева и десна страна скуповне формуле F се исто представљају преко Венових дијаграма:



б) $a = x\in A \quad (\neg a = x\notin A), \quad b = x\in B, \quad c = x \in C$: $\qquad (c\wedge\neg a)\wedge(c\wedge\neg b)\vee(a\wedge b) \ \Leftrightarrow\ c\vee(a\wedge b)\wedge\neg(a\veebar b)$.

в) F је увек тачна, јер је одговарајућа исказна формула φ таутологија (у последњој колони су све 1).

					p	q	r		L		s		D	φ
a	b	c	$\neg a$	$\neg b$	$c\wedge\neg a$	$c\wedge\neg b$	$a\wedge b$	$p\wedge q$	$p\wedge q\vee r$	$c\vee r$	$a\veebar b$	$\neg s$	$c\vee r\wedge\neg s$	$L\ \Leftrightarrow\ D$
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1

г) $D = (\neg a\wedge\neg b\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge\neg c)\vee(a\wedge b\wedge c)$.

φ нема СКНФ (јер нема 0), али има СДНФ: $\varphi = (\neg a\wedge\neg b\wedge\neg c)\vee(\neg a\wedge\neg b\wedge c)\vee(\neg a\wedge b\wedge\neg c)\vee(\neg a\wedge b\wedge c)\vee(a\wedge\neg b\wedge\neg c)\vee(a\wedge\neg b\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge\neg c)\vee(a\wedge b\wedge c)$.

3. Формула је $\underline{(\forall x\subseteq A)}\Big(x\subseteq y\wedge\underline{(\exists y\subseteq A)}\,x\cup y = z\ \Leftrightarrow\ \underline{(\exists y\subseteq A)}\,y = x\cup z\vee z\subseteq\emptyset\Big)$,

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(y,z)$.

Формула $(\exists y\subseteq A)\,x\cup y = z$ еквивалентна је са $x\subseteq z$ (ако је $x\subseteq z$ онда можемо узети $y=z$, а ако је $x\nsubseteq z$, онда постоји елемент $m\in x$, такав да $m\notin z$, али онда је $m\in x\cup y$, па не важи $x\cup y = z$ ни за једно y).
Формула $(\exists y\subseteq A)\,y = x\cup z$ је увек тачна (1), јер за фиксиране x и z увек постоји и њихова унија $x\cup z$.

Како је $1\vee p = 1$, формула у загради се своди на $x\subseteq y\wedge x\subseteq z\ \Leftrightarrow\ 1$, што је исто што и $x\subseteq y\wedge x\subseteq z$.

Даље, полазна формула $F = (\forall x\subseteq A)\,x\subseteq y\wedge x\subseteq z$ је тачна за све $x\subseteq A$ ако и само ако је $y=z=A$, тј.

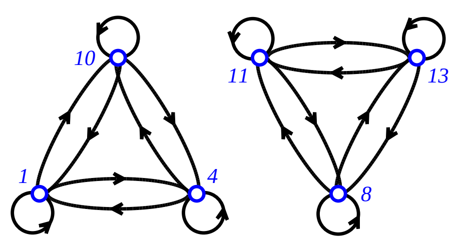
$$v(F) = \begin{cases} 1, & y=A,\ z=A \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & y=A,\ z=A \\ 0, & y\neq A \\ 0, & z\neq A \end{cases}$$

Када је $A=\emptyset$ формула F је увек тачна, тј. $v(F)=1$.

4. За дате бројеве је збир цифара њихових квадрата: $zcb(1^2)=1$, $zcb(4^2)=1+6=7$, $zcb(8^2)=6+4=10$, $zcb(10^2)=1+0+0=1$, $zcb(11^2)=1+2+1=4$, $zcb(13^2)=1+6+9=16$. Даље, посматрамо разлике ових бројева и оне треба да су дељиве са 6.

а)

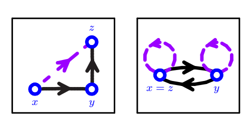
ϱ	1	4	8	10	11	13
1	1	1	0	1	0	0
4	1	1	0	1	0	0
8	0	0	1	0	1	1
10	1	1	0	1	0	0
11	0	0	1	0	1	1
13	0	0	1	0	1	1



б) Јесте **Р** јер $6\mid 0$, а и на главној дијагонали таблице имамо све 1, а и у графу око сваког чвора има петља.

Јесте **С**, јер су елементи симетрични у односу на главну дијагоналу таблице међусобно једнаки, а и између свака 2 различита чвора у графу постоји или 0 или 2 гране.

Није **АС**, јер $1\,\varrho\,4,\ 4\,\varrho\,1\ \Rightarrow\ 1=4$ ↯.

Јесте **Т** (јер у графу нема ниједне од 2 ситуације које кваре **Т**: ).

в) Није релација поретка, јер није **АС**. Јесте релација еквиваленције, јер је **Р**, **С** и **Т**.

г) Релација има 2 класе еквиваленције: $\quad [1]=[4]=[10]=\{1,4,10\}$ и $[8]=[11]=[13]=\{8,11,13\}$.

Решења групе Г

1. а) $m =$ „Маја тренира кошарку“ $(\neg m =$ „Маја тренира одбојку“$)$, $n =$ „Нина тренира кошарку“, $o =$ „Оља тренира кошарку“.

$\mathrm{I} = (m \Leftrightarrow o) \vee (n \Rightarrow o)$, $\mathrm{II} = m \wedge n \vee o \wedge (m \Leftrightarrow n)$, $\mathrm{III} = \neg m \vee (n \veebar o)$, $\varphi = \mathrm{IV} = m \wedge n \vee \neg(o \Rightarrow m \vee n)$, $F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}$.

			r	s	I		t	v	II			III	p		q		IV	
m	n	o	$m \Leftrightarrow o$	$n \Rightarrow o$	$r \vee s$	$m \wedge n$	$m \wedge n \vee o$	$d \Leftrightarrow b$	$t \wedge v$	$\neg m$	$n \veebar o$	$\neg m \vee (n \veebar o)$	$m \wedge n$	$m \vee n$	$o \Rightarrow m \vee n$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	F
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0

Изјаве су непротивречне (има једна 1 у последњој колони F).

Како међу колонама у таблици које одговарају I, II, III и IV реченици нема две исте, то су међу датим реченицама нема логички еквивалентних.

б) Ниједна од ових формула није ни таутологија ни контрадикција (јер се у колонама које одговарају њима јављају и 1 и 0).

СКНФ: $\varphi_1 = (\neg m \vee \neg n \vee o)$. За КНФ ћемо узети горњу СКНФ.

СДНФ: $\varphi_2 = (\neg m \wedge n \wedge \neg o) \vee (m \wedge n \wedge o)$. За ДНФ ћемо узети горњу СДНФ.

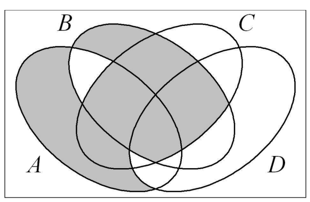
СКНФ: $\varphi_3 = (m \vee n \vee \neg o) \wedge (\neg m \vee \neg n \vee \neg o)$. За КНФ ћемо узети горњу СКНФ.

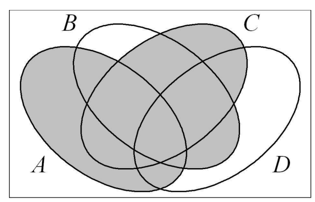
СДНФ: $\varphi_4 = (\neg m \wedge n \wedge \neg o) \vee (\neg m \wedge n \wedge o) \vee (m \wedge \neg n \wedge o) \vee (m \wedge n \wedge o)$.

За ДНФ можемо узети горњу СДНФ, али и једноставнији израз: $\varphi_4 = (\neg m \wedge n) \vee (m \wedge o)$.

в) Како је $F = 1$ само за $m = o = 0$ и $n = 1$, добијамо да Маја и Оља тренирају одбојку, а Нина кошарку.

2. а) Лево доле је приказана лева страна $(A \vartriangle B \setminus D) \cup (B \cap C)$ скуповне формуле F), а десно је приказана десна страна $A \cup C \cup (B \cap D)$.





б) $a = x \in A$, $b = x \in B$, $c = x \in C$, $d = x \in D$:

φ: $(a \veebar b) \wedge \neg d \vee (b \wedge c) \Rightarrow a \vee c \vee (b \wedge d)$.

в) Исказна формула φ није таутологија (у последњој колони има једна 0).

						p	q	L		D	φ
a	b	c	d	$a \veebar b$	$\neg d$	$(a \veebar b) \wedge \neg d$	$b \wedge c$	$p \vee q$	$b \wedge d$	$a \vee c \vee (b \wedge d)$	$L \Rightarrow D$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1

г) Исказну формулу φ представимо у СКНФ (јер има три 0):

$\varphi = (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d)$.

Десну страну D представимо у СКНФ (јер има само једна 0): $\quad D = a \vee \neg b \vee c \vee d$.

3. Формула је $\underline{(\forall x \in \mathbb{N}_0)}\Big(x \geqslant y \wedge \underline{(\exists y \in \mathbb{N}_0)}\, x - y = z \;\Leftrightarrow\; \underline{(\exists y \in \mathbb{N}_0)}\, x = y - z \vee z \geqslant 7\Big)$,

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(y, z)$.

Формула $(\exists y \in \mathbb{N}_0)\, x - y = z$ еквивалентна је са $x \geqslant z$ (ако је $x \geqslant z$ онда можемо узети $y = x - z \in \mathbb{N}_0$, а ако је $x < z$, онда $y = x - z \notin \mathbb{N}_0$).
Формула $(\exists y \in \mathbb{N}_0)\, x = y - z$ је увек тачна (1), јер за све природне бројеве са нулом x и z постоји њихов збир $y = x + z$ и он је такође природан број или нула.

Како је $1 \vee p = 1$, формула у загради се своди на $x \geqslant y \wedge x \geqslant z \;\Leftrightarrow\; 1$, што је исто што и $x \geqslant y \wedge x \geqslant z$.

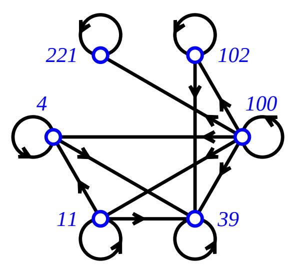
Даље, полазна формула $F = (\forall x \in \mathbb{N}_0)\, x \geqslant y \wedge x \geqslant z$ је тачна за све $x \in \mathbb{N}_0$ ако и само ако је $y = z = 0$, тј.

$$v(F) = \begin{cases} 1, & y = 0,\ z = 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & y = 0,\ z = 0 \\ 0, & y > 0 \\ 0, & z > 0 \end{cases}$$

4. За дате бројеве је збир цифара: $zcb(4) = 4$, $zcb(11) = 2$, $zcb(39) = 12$, $zcb(100) = 1$, $zcb(102) = 3$, $zcb(221) = 5$.

а)

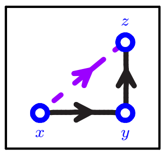
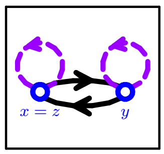
ϱ	4	11	39	100	102	221
4	1	0	1	0	0	0
11	1	1	1	0	0	0
39	0	0	1	0	0	0
100	1	1	1	1	1	1
102	0	0	1	0	1	0
221	0	0	0	0	0	1



б) Јесте **P** јер сваки збир цифара дели самог себе, а и на главној дијагонали таблице имамо све 1, а и у графу око сваког чвора има петља.

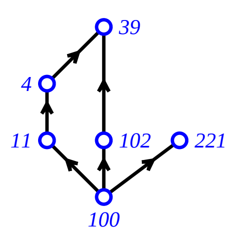
Није **C**, јер $4\,\varrho\,39 \;\Rightarrow\; 39\,\varrho\,4$ ↯.

Јесте **AC**, јер међу елементима симетричним у односу на главну дијагоналу таблице нема две 1, а и између свака 2 различита чвора у графу постоји или 0 или 1 грана.

Јесте **T** (јер у графу нема ниједне од 2 ситуације које кваре **T**:  ).

г) Није релација еквиваленције, јер није **C**. Јесте релација поретка, јер је **P**, **AC** и **T**.

д) Ово је релација парцијалног поретка, јер $4 \not\varrho\; 221, 221 \not\varrho\; 4$. Такође, исти закључак можемо добити јер њен Хасеов дијаграм приказан на наредној слици није ланац.



Најмањи елемент је 100, јер је он у релацији са свим осталим (у таблици у врсти која одговара 100 су све 1; у графу из 100 води грана у све чворове; на Хасеовом дијаграму из 100 води пут у све остале чворове), па је он и једини минимални елемент.

Елементи 39 и 221 су максимални, јер сваки од њих није у релацији са неким од осталих (у таблици у врстама које одговарају њима има 1 само на главној дијагонали; у графу из 39 и 221 не води ниједна грана сем петље; у Хасовом дијаграму из 39 и 221 не води ниједна грана), па како има више максималних елемента следи да не постоји највећи.