A

1. Основни искази су:

$a =$ „Ана је вила“ $=$ „Ана увек говори истину“ $\qquad \neg a =$ „Ана је вештица“ $=$ „Ана увек лаже“

$b =$ „Бана је вила“

$c =$ „Цана је вила“

Исказне формуле које одговарају датим реченицама су:

А: $a \ \Rightarrow \ \neg c$

Б: $(a \vee c) \ \Rightarrow \ (b \veebar c)$

Ц: $\neg b \ \wedge \ (a \Rightarrow c)$

Да ли су ове реченице непротивречне (и поступак)?

					φ	F	A'	B'	C'	
a	b	c	A	B	C	$A \wedge B \wedge C$	$a \Leftrightarrow A$	$b \Leftrightarrow B$	$c \Leftrightarrow C$	$A' \wedge B' \wedge C'$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Како у колони F има 1, дате изјаве су непротивречне.

Једна СКНФ и једна КНФ за φ:

СКНФ (а то је и КНФ): $\varphi = (a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$

КНФ: $\varphi = \neg b \wedge (\neg a \vee c)$

Једна СДНФ и једна ДНФ за F:

СДНФ (а то је и ДНФ): $F = (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)$

ДНФ: $F = \neg a \wedge \neg b$

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада (и зашто)?

У 3 колоне таблице A', B', C' смо одредили да ли се истинитосна вредност исказа a (тј. b, c) поклапа са A (тј. B, C). Рецимо када је Ана вештица, тј. лаже $a = 0$, онда и њен исказ мора бити лажан $A = 0$, а када је вила, тј. говори истину онда је и $a = 1$ и $A = 1$, па мора бити $a \Leftrightarrow A$. У последњој колони $A' \wedge B' \wedge C'$ када имамо 1 онда се сва три a, b, c поклапају са одговарајућим A, B, C (то смо могли да видимо и без последње 4 колоне у таблици, само посматрајући вредности a, b, c и A, B, C — тако смо радили у Д групи). То се дешава само у два случаја, а за њих имамо да је заједничко $a = 1$ и $c = 0$, па је Ана вила, а Цана вештица, док за Бану ништа не можемо рећи (јер имамо и $b = 0$ и $c = 1$).

Напомена. Велики број студената је тражио шта се поклапа када је $F = 1$, али то је погрешно!

група	**Презиме и име студента**	**бр. индекса**

A **2.** Исказна формула F која одговара датом колу:

$F = (p \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee (p \wedge r \wedge s)$

Да ли је F таутологија и/или контрадикција (и поступак)?

				a	b	c	d	F
p	q	r	s	$p \wedge \neg s$	$p \wedge q \wedge \neg r$	$\neg p$	$p \wedge r \wedge s$	$a \vee b \vee c \vee d$
0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1	1

Како се у колони F јавља 0 није таутологија, а како се у колони F јављају 1 није контрадикција.

Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ (и образложења)?

Како су чланови у заградама спојени са $\vee$ то дата формула не може бити ни СКНФ ни КНФ.

Како чланови спојени са $\vee$ имају од 1 до 3 променљиве, не могу бити ни СДНФ ни СКНФ (у њима се у сваком том члану јављају све 4 променљиве: p, q, r, s).

Дата формула јесте ДНФ, јер чланови спојени са $\vee$ представљају конјункте (променљиве и њихове негације су спојене са $\wedge$).

Представити F у једној КНФ и једној ДНФ:

СКНФ (а то је и КНФ): $F = \neg p \vee q \vee r \vee \neg s$

горња формула представља и ДНФ, јер литерали $(\neg p, q, r, \neg s)$ представљају и конјункте!

могла је за ДНФ да се узме и СДНФ (али онда треба исписати све чланове):

$$F = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee \\ (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee \\ (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s)$$

A **3.** Шта су слободне, а шта везане променљиве?

Сва појављивања променљивих x и y су везана, док је само последње z везано, а остала су слободна,

па је формула облика $\quad F(\quad z \quad)$.

Преведена формула:

$$F(z) \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z = \emptyset \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow (\exists z \subseteq A)\, x \cup z = y\big)\Big)$$

Истинитосна вредност формуле F (и поступак):

Формула $(\exists z \subseteq A)\, x \cup z = y$ је еквивалентна са $x \subseteq y$:

– ако је $x \subseteq y$ онда важи $x \cup y = y$, па за z можемо узети $z = y$, па $(\exists z \subseteq A)\, x \cup z = y$

– ако $x \nsubseteq y$ онда постоји $m \in x$ такав да $m \notin y$, али онда и за било које z важи $m \in x \cup z$, па не може бити $x \twoheadrightarrow \cup z = y$

(или: ако $(\exists z \subseteq A)\, x \cup z = y$, онда је $y = x \cup z$, па је $y \supseteq x$, тј. $x \subseteq y$).

Тиме се дата формула свела на:

$$F \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z = \emptyset \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow x \subseteq y\big)\Big) \qquad (*)$$

$1^\circ\ A = \emptyset$

Све променљиве могу бити само $x, y, z \subseteq \emptyset$, тј. $x = y = z = \emptyset$, па дата формула (без квантификатора, φ) постаје

$$\varphi \quad = \quad \Big(\emptyset = \emptyset \Rightarrow \big((\emptyset \neq \emptyset \wedge \emptyset = \emptyset) \Rightarrow \emptyset \subseteq \emptyset\big)\Big)$$

тј. $1 \ \Rightarrow\ \big((0 \wedge 1) \ \Rightarrow\ 1\big) = 1 \ \Rightarrow\ 1 = 1$, па је $v(\varphi) = 1$, што повлачи да је и у овом случају $v(F) = 1$.

$2^\circ\ A \neq \emptyset$

$v(F) = 1$, јер можемо десну страну последње импликације учинити тачном (тако што постоји $y = A$ за које ће за свако $x \subseteq A$ важити $x \subseteq y$), па како је $p \ \Rightarrow\ 1 = 1$, онда ће и цела формула бити тачна.

Задатак можемо завршити и поједностављивањем израза $(*)$:

Сада ћемо 2 пута искористити формулу за ослобађање од импликације $p \ \Rightarrow\ q = \neg p \vee q$:

$$F \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z = \emptyset \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow x \subseteq y\big)\Big)$$

$$F \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z = \emptyset \Rightarrow \big((x = y \vee y \neq z) \vee x \subseteq y\big)\Big)$$

$$F \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z \neq \emptyset \vee x = y \vee y \neq z \vee x \subseteq y\Big)$$

Када је $x = y$ тачно, онда је и $x \subseteq y$, па се дата формула може поједноставити:

$$F \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z \neq \emptyset \vee y \neq z \vee x \subseteq y\Big)$$

Како у формули без квантификатора $\ \varphi = z \neq \emptyset \ \vee\ y \neq z \ \vee\ x \subseteq y\ $ на део $z \neq \emptyset$ не делује ниједан квантификатор, а на део $y \neq z$ делује само $(\exists y \subseteq A)$, онда квантификаторима можемо проћи кроз F:

$$F \quad = \quad z \neq \emptyset \quad \vee \quad (\exists y \subseteq A)\, y \neq z \quad \vee \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\, x \subseteq y$$

Други део $(\exists y \subseteq A)\, y \neq z$ је тачан (можемо за y узети $y = A \setminus z$ и онда је $A \setminus z = y \neq z$), а и трећи део $(\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\, x \subseteq y$ је тачан (можемо за y узети $y = A$ и онда је $x \subseteq y = A$), па формула F постаје:

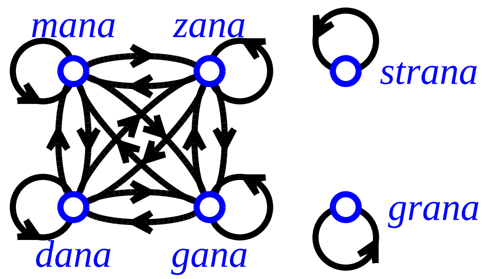
$$F \quad = \quad z \neq \emptyset \ \vee\ 1 \ \vee\ 1 \quad = \quad 1.$$

Све речи из X имају исти трословни завршетак, *ana*, па је довољно гледати само први услов да имају једнак број сугласника. Речи *dana*, *gana*, *zana*, *mana* имају 2, реч *grana* има 3, док *strana* има 4 сугласника.

A

4. а) ϱ таблично и преко графа:

ϱ	*dana*	*gana*	*grana*	*zana*	*mana*	*strana*
dana	1	1	0	1	1	0
gana	1	1	0	1	1	0
grana	0	0	1	0	0	0
zana	1	1	0	1	1	0
mana	1	1	0	1	1	0
strana	0	0	0	0	0	1



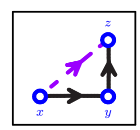
б) Да ли је ϱ рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна (уписати **јесте**/**није** и објаснити)?

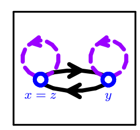
Р ЈЕСТЕ, јер су сви ел. на главној дијагонали једнаки 1 или што око сваког чвора има петља.

С ЈЕСТЕ, јер су сви ел. симетрични у односу на главну дијагоналу једнаки или што између 2 различита чвора има 0 или 2 гране.

АС НИЈЕ, јер $dana\,\varrho\,gana,\ gana\,\varrho\,dana \;\Rightarrow\; dana = gana$ ↯

Т ЈЕСТЕ, јер на графу нема ниједне од следеће 2 ситуације које кваре Т:





в) **рел. поретка** НИЈЕ, јер није АС.

рел. еквиваленције ЈЕСТЕ, јер је Р, С и Т.

г) Уколико је ϱ релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Класе еквиваленције су:

$[dana] = [gana] = [zana] = [mana] = \{dana, gana, zana, mana\}$

$[grana] = \{grana\}$

$[strana] = \{strana\}$

Б **1.** Основни искази су:

$a =$ „Ацко је патуљак“ $=$ „Ацко увек говори истину“ $\neg a =$ „Ацко је гном“ $=$ „Ацко увек лаже“

$b =$ „Буцко је патуљак“

$c =$ „Цицко је патуљак“

Исказне формуле које одговарају датим реченицама су:

А: $a \veebar c$

Б: $a \wedge (c \Rightarrow b)$

Ц: $(a \vee b) \Rightarrow \neg c$

Да ли су ове реченице непротивречне (и поступак)?

				φ		F	A'	B'	C'	
a	b	c	A	B	C	$A \wedge B \wedge C$	$a \Leftrightarrow A$	$b \Leftrightarrow B$	$c \Leftrightarrow C$	$A' \wedge B' \wedge C'$
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0

Како у колони F има 1, дате изјаве су непротивречне.

Једна СКНФ и једна КНФ за φ:

СКНФ (а то је и КНФ): $\varphi = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$

КНФ: $\varphi = a \wedge (b \vee \neg c)$

Једна СДНФ и једна ДНФ за F:

СДНФ (а то је и ДНФ): $F = (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$

ДНФ: $F = a \wedge \neg c$

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада (и зашто)?

У 3 колоне таблице A', B', C' смо одредили да ли се истинитосна вредност исказа a (тј. b, c) поклапа са A (тј. B, C). Рецимо када је Ацко гном, тј. лаже $a = 0$, онда и његов исказ мора бити лажан $A = 0$, а када је патуљак, тј. говори истину онда је и $a = 1$ и $A = 1$, па мора бити $a \Leftrightarrow A$. У последњој колони $A' \wedge B' \wedge C'$ када имамо 1 онда се сва три a, b, c поклапају са одговарајућим A, B, C (то смо могли да видимо и без последње 4 колоне у таблици, само посматрајући вредности a, b, c и A, B, C — тако смо радили у Г групи). То се не дешава ни у једном случају, па се о њима не може ништа закључити!

Напомена. Велики број студената је тражио шта се поклапа када је $F = 1$, али то је погрешно!

група	**Презиме и име студента**	**бр. индекса**

Б

2. Исказна формула F која одговара датом колу:

$F = a \wedge \neg\big((b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge d)\big) \wedge \neg(c \vee \neg d)$

(Овде је потребно било ставити овакву формулу, а не неку сређивану – то је битно због питања да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ! Такође, у $(a \wedge \neg b \wedge d)$ често је изостављан члан d.)

Да ли је F таутологија и/или контрадикција (и поступак)?

				p	q		r		s	F
a	b	c	d	$b \wedge \neg c$	$a \wedge \neg b \wedge d$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$c \vee \neg d$	$\neg(c \vee \neg d)$	$a \wedge r \wedge s$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0

Како су у колони F све 0 то је контрадикција. Како се у колони F јављају 0 није таутологија.

Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ (и образложења)?

Како су чланови у заградама спојени са $\wedge$ то дата формула не може бити ни СДНФ ни ДНФ.

Како чланови спојени са $\wedge$ имају од 1 до 3 променљиве, не могу бити ни СДНФ ни СКНФ (у њима се у сваком том члану јављају све 4 променљиве: a, b, c, d).

Дата формула није ни КНФ, јер сви чланови спојени са $\wedge$ не представљају дисјункте (негација дисјункта, нпр. $\neg(c \vee \neg d)$, није дисјункт!).

Представити F у једној КНФ и једној ДНФ:

СДНФ не постоји јер су све 0, али ДНФ постоји: $F = \neg a \wedge a$

горња формула представља и КНФ, јер литерали ($\neg a$ и a) представљају и дисјункте!

могла је за КНФ да се узме и СКНФ (али онда треба исписати све чланове):

$$F = (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge$$
$$(a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge$$
$$(\neg a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d)$$

ДНФ смо могли да добијемо и тако што би прошли негацијом кроз формулу F:

$F = a \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg d) \wedge \neg c \wedge d$

Б **3.** Шта су слободне, а шта везане променљиве?

Сва појављивања променљивих x и y су везана, док је друго z везано, а прво z је слободно,

па је формула облика $F(\quad z \quad)$.

Преведена формула:

$$F(z) \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big(\big((x = 1 \Rightarrow x = y) \Rightarrow y = z\big) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N})\, y + z = x\Big)$$

Истинитосна вредност формуле F (и поступак):

Формула $(\exists z \in \mathbb{N})\, y + z = x$ је еквивалентна са $x > y$:

– ако је $x > y$ и $x, y \in \mathbb{N}$, онда важи $x - y \in \mathbb{N}$, па за z можемо узети $z = x - y$, па $(\exists z \in \mathbb{N})\, y + z = x$

– ако није $x > y$ онда је $x \leqslant y$, али онда и за било које $z \in \mathbb{N}$ важи $x \leqslant y < y + z$, па не може бити $y + z = x$ (или: ако $(\exists z \in \mathbb{N})\, y + z = x$, онда је $z = x - y$ и то $z \in \mathbb{N}$ само ако је $x > y$).

Тиме се дата формула свела на:

$F \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big(\big((x = 1 \Rightarrow x = y) \Rightarrow y = z\big) \Rightarrow x > y\Big)$

Сада ћемо 3 пута искористити формулу за ослобађање од импликације $p \;\Rightarrow\; q = \neg p \vee q$:

$F \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big(\big((x \neq 1 \vee x = y) \Rightarrow y = z\big) \Rightarrow x > y\Big)$

$F \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big(\big((x = 1 \wedge x \neq y) \vee y = z\big) \Rightarrow x > y\Big)$

$F \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big(\big((x \neq 1 \vee x = y) \wedge y \neq z\big) \vee x > y\Big)$

Сада искористимо формулу за дистрибутивност конјункције и дисјункције $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$:

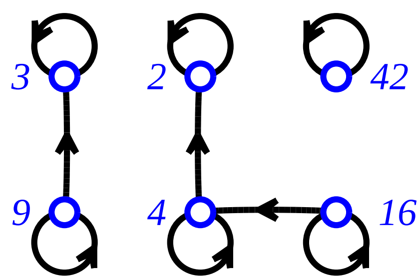
$F \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big((x \neq 1 \wedge y \neq z) \vee (x = y \wedge y \neq z) \vee x > y\Big)$

За свако $x \neq 1$ дата формула без квантификатора $\varphi = (x \neq 1 \wedge y \neq z) \vee (x = y \wedge y \neq z) \vee x > y)$ може бити тачна ако узмемо да је $y = 1$ (тј. тада постоји тражено y, $y = 1$). Ако је $x = 1$ онда ни $(x \neq 1 \wedge y \neq z)$ ни $x > y$ не могу бити тачни, док је $(x = y \wedge y \neq z)$ тачно само уколико је $y = 1 \neq z$. Стога је $v(F) = \begin{cases} 1, & z \neq 1 \\ 0, & z = 1. \end{cases}$

Сви бројеви из X имају различит збир цифара: $zc(2) = 2$, $zc(3) = 3$, $zc(4) = 4$, $zc(9) = 9$, $zc(16) = 7$, $zc(42) = 6$, па је за различите бројеве довољно гледати само први услов, а ту је само $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ и $16 = 4^2$. Сваки број има једнак збир цифара са самим собом!

Б **4. а)** ϱ таблично и преко графа:

ϱ	2	3	4	9	16	42
2	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	1	0	1	0	0	0
9	0	1	0	1	0	0
16	0	0	1	0	1	0
42	0	0	0	0	0	1



б) Да ли је ϱ рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна (уписати **јесте**/**није** и објаснити)?

Р ЈЕСТЕ, јер су сви ел. на главној дијагонали једнаки 1 или што око сваког чвора има петља.

С НИЈЕ, јер $9\,\varrho\,3 \Rightarrow 3\,\varrho\,9$ $\lightning$ јер $3 \neq 9^2$ и $zc(3) \neq zc(9)$

АС ЈЕСТЕ, јер се у паровима ел. симетричних у односу на главну дијагоналу не јављају две 1 или што између 2 различита чвора има 0 или 1 грана.

Т НИЈЕ, јер $16\,\varrho\,4,\ 4\,\varrho\,2 \Rightarrow 16\,\varrho\,2$ $\lightning$ јер $16 \neq 2^2$ и $zc(16) \neq zc(2)$

в) **рел. поретка** НИЈЕ, јер није Т.

рел. еквиваленције НИЈЕ, јер није С и није Т.

г) Уколико је ϱ релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Г **1.** Основни искази су:

$a =$ „Ацко је патуљак“ = „Ацко увек говори истину“ $\neg a =$ „Ацко је гном“ = „Ацко увек лаже“

$b =$ „Буцко је патуљак“

$c =$ „Цицко је патуљак“

Исказне формуле које одговарају датим реченицама су:

А: $\neg c \ \wedge \ (b \Rightarrow \neg a)$

Б: $b \ \Rightarrow \ a$

Ц: $(a \Rightarrow b) \ \Rightarrow \ (c \Leftrightarrow a)$

Да ли су ове реченице непротивречне (и поступак)?

				φ		F
a	b	c	A	B	C	$A \wedge B \wedge C$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0

Како у колони F има 1, дате изјаве су непротивречне.

Једна СКНФ и једна КНФ за φ:

СКНФ (а то је и КНФ): $\varphi = (a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$

КНФ: $\varphi = a \vee \neg b$

Једна СДНФ и једна ДНФ за F:

СДНФ (а то је и ДНФ): $F = (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c)$

ДНФ: $F = \neg b \wedge \neg c$

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада (и зашто)?

Тражимо врсте таблице у којој се сва три прва елемента a, b, c поклапају са одговарајућим од наредна три A, B, C, тј. када је $a \Leftrightarrow A$ и $b \Leftrightarrow B$ и $c \Leftrightarrow C$ (формалније ово смо могли да урадимо као у Б групи!). То се не дешава ни у једном случају, па се о њима не може ништа закључити!

Напомена. Велики број студената је тражио шта се поклапа када је $F = 1$, али то је погрешно!

групa	Презиме и име студента	бр. индекса

Г

2. Исказна формула F која одговара датом колу:

$F = (a \vee \neg d) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge \neg a \wedge (a \vee c \vee d)$

Да ли је F таутологија и/или контрадикција (и поступак)?

				p	q	r	s	F
a	b	c	d	$a \vee \neg d$	$a \vee b \vee \neg c$	$\neg a$	$a \vee c \vee d$	$p \wedge q \wedge r \wedge s$
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0

Како се у колони F јавља 0 није таутологија, а како се у колони F јављају 1 није контрадикција.

Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ (и образложења)?

Како су чланови у заградама спојени са $\wedge$ то дата формула не може бити ни СДНФ ни ДНФ.

Како чланови спојени са $\wedge$ имају од 1 до 3 променљиве, не могу бити ни СДНФ ни СКНФ (у њима се у сваком том члану јављају све 4 променљиве: a, b, c, d).

Дата формула јесте КНФ, јер чланови спојени са $\wedge$ представљају дисјункте (променљиве и њихове негације су спојене са $\vee$).

Представити F у једној КНФ и једној ДНФ:

СДНФ (а то је и ДНФ): $F = \neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d$

горња формула представља и КНФ, јер литерали $(\neg a, b, c, \neg d)$ представљају и дисјункте!

могла је за КНФ да се узме и СКНФ (али онда треба исписати све чланове):

$$F = (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge$$
$$(a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge$$
$$(\neg a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d)$$

Г **3.** Шта су слободне, а шта везане променљиве?

Сва појављивања променљивих x и y су везана, док је само последње z везано, а остала су слободна,

па је формула облика $\quad F(\quad z \quad)$.

Преведена формула:

$$F(z) \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z = 5 \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N}_0)\, x - z = y\big)\Big)$$

Истинитосна вредност формуле F (и поступак):

Формула $(\exists z \in \mathbb{N}_0)\, x - z = y$ је еквивалентна са $x \geqslant y$:

– ако је $x \geqslant y$ и $x, y \in \mathbb{N}_0$, онда важи $x - y \in \mathbb{N}_0$, па за z можемо узети $z = x - y$, па $(\exists z \in \mathbb{N}_0)\, y + z = x$

– ако није $x \geqslant y$ онда је $x < y$, али онда и за било које $z \in \mathbb{N}_0$ важи $x - z \leqslant x < y$, па не може бити $x - z = y$

(или: ако $(\exists z \in \mathbb{N}_0)\, x - z = y$, онда је $z = x - y$ и то $z \in \mathbb{N}_0$ само ако је $x \geqslant y$).

Тиме се дата формула свела на:

$$F \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z = 5 \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow x \geqslant y\big)\Big) \qquad (*)$$

$v(F) = 1$, јер можемо десну страну последње импликације учинити тачном (тако што постоји $y = 0$ за које ће за свако $x \in \mathbb{N}_0$ важити $x \geqslant y$), па како је $p \;\Rightarrow\; 1 = 1$, онда ће и цела формула бити тачна.

Задатак можемо завршити и поједностављивањем израза $(*)$:

Сада ћемо 2 пута искористити формулу за ослобађање од импликације $p \;\Rightarrow\; q = \neg p \vee q$:

$$F \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z = 5 \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow x \geqslant y\big)\Big)$$

$$F \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z = 5 \Rightarrow \big((x = y \vee y \neq z) \vee x \geqslant y\big)\Big)$$

$$F \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z \neq 5 \vee x = y \vee y \neq z \vee x \geqslant y\Big)$$

Када је $x = y$ тачно, онда је и $x \subseteq y$, па се дата формула може поједноставити:

$$F \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z \neq 5 \vee y \neq z \vee x \geqslant y\Big)$$

Како у формули без квантификатора $\;\varphi = z \neq \emptyset \;\vee\; y \neq z \;\vee\; x \subseteq y\;$ на део $z \neq \emptyset$ не делује ниједан квантификатор, а на део $y \neq z$ делује само $(\exists y \subseteq A)$, онда квантификаторима можемо проћи кроз F:

$$F \quad = \quad z \neq 5 \quad \vee \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\, y \neq z \quad \vee \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\, x \geqslant y$$

Други део $(\exists y \subseteq A)\, y \neq z$ је тачан (можемо за y узети $y = z + 1$ и онда је $z + 1 = y \neq z$), а и трећи део $(\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\, x \geqslant y$ је тачан (можемо за y узети $y = 0$ и онда је $x \geqslant y = 0$), па формула F постаје:

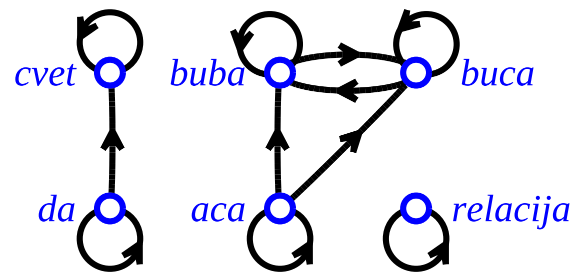
$$F \quad = \quad z \neq 5 \;\vee\; 1 \;\vee\; 1 \quad = \quad 1.$$

За речи из X важи да *cvet* и *da* имају 1 самогласник, *aca*, *buba*, *buca* имају по 2 самогласника, док *relacija* има 4 самогласника. Стога је довољно гледати само први услов, међу речима које имају једнак број самогласника. Реч *da* није дужа од *cvet*, реч *aca* није дужа од *buba* и *buca*, реч *buba* није дужа од *buca* и реч *buca* није дужа од *buba* (и кад су исте дужине прва реч није дужа од друге – то важи и кад су у питању исте речи!).

Г

4. а) ϱ таблично и преко графа:

ϱ	*aca*	*buba*	*buca*	*cvet*	*da*	*relacija*
aca	1	1	1	0	0	0
buba	0	1	1	0	0	0
buca	0	1	1	0	0	0
cvet	0	0	0	1	0	0
da	0	0	0	1	1	0
relacija	0	0	0	0	0	1



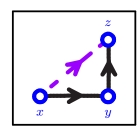
б) Да ли је ϱ рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна (уписати **јесте**/**није** и објаснити)?

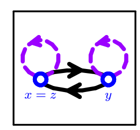
Р ЈЕСТЕ, јер су сви ел. на главној дијагонали једнаки 1 или што око сваког чвора има петља.

С НИЈЕ, јер $da \, \varrho \, cvet \;\Rightarrow\; cvet \, \varrho \, da$

АС НИЈЕ, јер $buba \, \varrho \, buca, \; buca \, \varrho \, buba \;\Rightarrow\; buba = buca$

Т ЈЕСТЕ, јер на графу нема ниједне од следеће 2 ситуације које кваре Т:





в) **рел. поретка** НИЈЕ, јер није АС.

рел. еквиваленције НИЈЕ, јер није С.

г) Уколико је ϱ релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Д **1.** Основни искази су:

$a =$ „Ана је вила“ $=$ „Ана увек говори истину“ $\neg a =$ „Ана је вештица“ $=$ „Ана увек лаже“

$b =$ „Бана је вила“

$c =$ „Цана је вила“

Исказне формуле које одговарају датим реченицама су:

А: $b \vee c \;\Rightarrow\; a$

Б: $b \;\Leftrightarrow\; a$

Ц: $b \;\wedge\; (\neg a \Rightarrow c)$

Да ли су ове реченице непротивречне (и поступак)?

					φ	F
a	b	c	A	B	C	$A \wedge B \wedge C$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Како у колони F има 1, дате изјаве су непротивречне.

Једна СКНФ и једна КНФ за φ:

СКНФ (а то је и КНФ): $\varphi = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$

КНФ: $\varphi = b \wedge (a \vee c)$

Једна СДНФ и једна ДНФ за F:

СДНФ (а то је и ДНФ): $F = (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

ДНФ: $F = a \wedge b$

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада (и зашто)?

Тражимо врсте таблице у којој се сва три прва елемента a, b, c поклапају са одговарајућим од наредна три A, B, C, тј. када је $a \Leftrightarrow A$ и $b \Leftrightarrow B$ и $c \Leftrightarrow C$ (формалније ово смо могли да урадимо као у А групи!). То се дешава само у два случаја, а за њих имамо да је заједничко $a = 1$, па је Ана вила, док за Бану и Цану ништа не можемо рећи (јер имамо и $b = 0$ и $b = 1$, односно $c = 0$ и $c = 1$).

Напомена. Велики број студената је тражио шта се поклапа када је $F = 1$, али то је погрешно!

група	Презиме и име студента	бр. индекса

Д

2. Исказна формула F која одговара датом колу:

$F = p \vee \neg\big((q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee s)\big) \vee \neg(r \wedge \neg s)$

(Овде је потребно било ставити овакву формулу, а не неку сређивану – то је битно због питања да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ! Такође, у $(p \vee \neg q \vee s)$ често је изостављан члан s.)

Да ли је F таутологија и/или контрадикција (и поступак)?

				a	b		c		d	F
p	q	r	s	$q \vee \neg r$	$p \vee \neg q \vee s$	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$r \wedge \neg s$	$\neg(r \wedge \neg s)$	$p \vee c \vee d$
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1

Како су у колони F све 1 то је таутологија. Како се у колони F јављају 1 није контрадикција.

Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ (и образложења)?

Како су чланови у заградама спојени са $\vee$ то дата формула не може бити ни СКНФ ни КНФ.

Како чланови спојени са $\vee$ имају од 1 до 3 променљиве, не могу бити ни СДНФ ни СКНФ (у њима се у сваком том члану јављају све 4 променљиве: p, q, r, s).

Дата формула није ни ДНФ, јер сви чланови спојени са $\vee$ не представљају конјункте (негација конјункта, нпр. $\neg(r \wedge \neg s)$, није конјункт!).

Представити F у једној КНФ и једној ДНФ:

СКНФ не постоји јер су све 1, али КНФ постоји: $F = \neg p \vee p$

горња формула представља и ДНФ, јер литерали ($\neg p$ и p) представљају и конјункте!

могла је за ДНФ да се узме и СДНФ (али онда треба исписати све чланове):

$$\begin{aligned}F = &(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee \\ &(\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee \\ &(p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s)\end{aligned}$$

ДНФ смо могли да добијемо и тако што би прошли негацијом кроз формулу F:

$F = p \vee (\neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee \neg r \vee s$

Д **3.** Шта су слободне, а шта везане променљиве?

Сва појављивања променљивих x и y су везана, док је друго z везано, а прво z је слободно,

па је формула облика $F(\quad z \quad)$.

Преведена формула:

$$F(z) \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x = \emptyset \Rightarrow x = y) \Rightarrow y = z\big) \Rightarrow (\exists z \subseteq A)\, y \cup z = x \wedge x \neq y\Big)$$

Истинитосна вредност формуле F (и поступак):

Формула $(\exists z \subseteq A)\, y \cup z = x$ је еквивалентна са $y \subseteq x$:

– ако је $y \subseteq x$ онда важи $y \cup x = x$, па за z можемо узети $z = x$, па $(\exists z \subseteq A)\, y \cup z = x$

– ако $y \not\subseteq x$ онда постоји $m \in y$ такав да $m \notin x$, али онда и за било које z важи $m \in y \cup z$, па не може бити $y \cup z = x$

(или: ако $(\exists z \subseteq A)\, y \cup z = x$, онда је $x = y \cup z$, па је $x \supseteq y$, тј. $y \subseteq x$).

Тиме се дата формула свела на:

$$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x = \emptyset \Rightarrow x = y) \Rightarrow y = z\big) \Rightarrow y \subseteq x \wedge x \neq y\Big)$$

Како је $y \subseteq x \wedge x \neq y$ еквивалентно са $y \subset x$ ($\subset$ је ознака за прави подскуп), формула постаје

$$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x = \emptyset \Rightarrow x = y) \Rightarrow y = z\big) \Rightarrow y \subset x\Big)$$

Сада ћемо 3 пута искористити формулу за ослобађање од импликације $p \;\Rightarrow\; q = \neg p \vee q$:

$$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x \neq \emptyset \vee x = y) \Rightarrow y = z\big) \Rightarrow y \subset x\Big)$$

$$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x = \emptyset \wedge x \neq y) \vee y = z\big) \Rightarrow y \subset x\Big)$$

$$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x \neq \emptyset \vee x = y) \wedge y \neq z\big) \vee y \subset x\Big)$$

Сада искористимо формулу за дистрибутивност конјункције и дисјункције $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$:

$$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big((x \neq \emptyset \wedge y \neq z) \vee (x = y \wedge y \neq z) \vee y \subset x\Big)$$

1° $A \neq \emptyset$

За свако $x \neq \emptyset$ дата формула без квантификатора $\varphi = (x \neq \emptyset \wedge y \neq z) \vee (x = y \wedge y \neq z) \vee y \subset x)$ може бити тачна ако узмемо да је $y = \emptyset$ (тј. тада постоји тражено y, $y = \emptyset$). Ако је $x = \emptyset$ онда ни $(x \neq \emptyset \wedge y \neq z)$ ни $y \subset x$ не могу бити тачни, док је $(x = y \wedge y \neq z)$ тачно само уколико је $y = \emptyset \neq z$. Стога је $v(F) = \begin{cases} 1, & z \neq \emptyset \\ 0, & z = \emptyset. \end{cases}$

2° $A = \emptyset$

Све променљиве могу бити само $x, y, z \subseteq \emptyset$, тј. $x = y = z = \emptyset$, па φ постаје

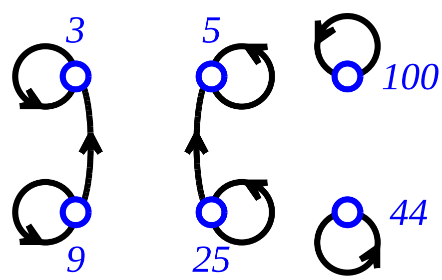
$$\varphi \quad = \quad \Big((\emptyset \neq \emptyset \wedge \emptyset \neq \emptyset) \vee (\emptyset = \emptyset \wedge \emptyset \neq \emptyset) \vee \emptyset \subset \emptyset\Big)$$

тј. $(0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee 0 = 0 \vee 0 \vee 0 = 0$, па је $v(\varphi) = 0$, што повлачи да је у овом случају $v(F) = 0$.

Сви бројеви из X имају различит збир цифара: $zc(3) = 3$, $zc(5) = 5$, $zc(9) = 9$, $zc(25) = 7$, $zc(44) = 8$, $zc(100) = 1$, па је за различите бројеве довољно гледати само први услов, а ту је само $9 = 3^2$ и $25 = 5^2$. Сваки број има једнак збир цифара са самим собом!

Д **4. а)** ϱ таблично и преко графа:

ϱ	3	5	9	25	44	100
3	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0
9	1	0	1	0	0	0
25	0	1	0	1	0	0
44	0	0	0	0	1	0
100	0	0	0	0	0	1



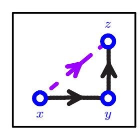
б) Да ли је ϱ рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна (уписати **јесте**/**није** и објаснити)?

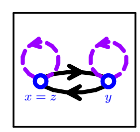
Р ЈЕСТЕ, јер су сви ел. на главној дијагонали једнаки 1 или што око сваког чвора има петља.

С НИЈЕ, јер $9\,\varrho\,3 \Rightarrow 3\,\varrho\,9$ $\lightning$ јер $3 \neq 9^2$ и $zc(3) \neq zc(9)$

АС ЈЕСТЕ, јер се у паровима ел. симетричних у односу на главну дијагоналу не јављају две 1 или што између 2 различита чвора има 0 или 1 грана.

Т ЈЕСТЕ, јер на графу нема ниједне од следеће 2 ситуације које кваре Т:



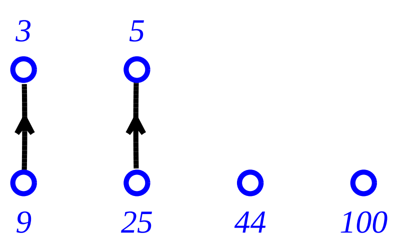


в) **рел. поретка** ЈЕСТЕ, јер је Р, АС и Т.

рел. еквиваленције НИЈЕ, јер није С.

г) Уколико је ϱ релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Хасеов дијаграм је:



Како он није ланац, релација ϱ је релација парцијалног поретка. То следи и из $3 \not\varrho\; 5$, $5 \not\varrho\; 3$.

Минимални елементи су $9, 25, 44, 100$ и како их има више не постоји најмањи елемент.

Максимални елементи су $3, 5, 44, 100$ и како их има више не постоји највећи елемент.