A **I колоквијум из ДМС-а** **A**

ФОН, 20.04.2013.

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Дате су следеће реченице

I Ако Душан добије на кладионици, отићи ће на летовање или ће купити аутомобил.

II Душан ће купити аутомобил ако добије на кладионици или оде на летовање.

III Није тачно: Душан неће отићи на летовање али ће купити аутомобил ако не добије на кладионици.

IV Душан ће купити аутомобил ако добије на кладионици и не оде на летовање.

Да ли су ове реченице непротивречне?
За исказну формулу φ која одговара II реченици одредити једну СКНФ и једну КНФ.
За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.
Да ли међу датим реченицама има логички еквивалентних реченица?

2. Дата је скуповна формула F:

$$A \triangle B = C \;\Rightarrow\; A \cap B \setminus D \subseteq A \setminus C,$$

где $A \triangle B$ представља симетричну разлику скупова A и B.
а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.
б) Представити F преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).
г) Представити и леву и десну страну исказне формуле у једној ДНФ или КНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\exists x)\Big((\exists y)\,\alpha\big(x, f(y,z)\big) \;\Leftrightarrow\; (\forall z)\,\alpha\big(y, f(x,z)\big)\Big) \vee \beta(x,a),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{N}_0$, $a\colon 8$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon >$, $f\colon +$, у зависности од валуације слободних променљивих.

4. На скупу $X = \{A, B, C, D, E, F\}$ дата је релација

$$\varrho:\; x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x \subset y \qquad \text{или} \qquad \text{скупови } x \text{ и } y \text{ имају исти број непарних бројева},$$

где су $A = \{1,3\}$, $B = \{1,2,3,5,7,9\}$, $C = \{2,5\}$, $D = \{2,3,4,5,6,7,23\}$, $E = \mathbb{N} \setminus \{23\}$, $F = \emptyset$.
а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.
б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Б **I колоквијум из ДМС-а** **Б**

ФОН, 20.04.2013.

______________________________ ______________

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Дате су следеће реченице

I Драгана ће купити ташну ако добије повишицу и не оде на скијање.

II Драгана ће купити ташну или неће добити повишицу нити ће отићи на скијање.

III Ако Драгана добије повишицу или оде на скијање, онда ће купити ташну.

IV Није тачно: Драгана неће купити ташну и неће отићи на скијање ако не добије повишицу.

Да ли су ове реченице непротивречне?
Да ли је исказна формула φ која одговара II реченици једна КНФ? Ако није одредити КНФ за φ.
За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.
Да ли међу датим реченицама има логички еквивалентних реченица?

2. Дата је скуповна формула F:

$$B \cup C = D \;\Rightarrow\; (A \vartriangle C) \cap B \subseteq D,$$

где $A \vartriangle C$ представља симетричну разлику скупова A и C.
а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.
б) Представити F преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).
г) Представити и леву и десну страну исказне формуле у једној ДНФ или КНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big((\exists z)\,\alpha\big(f(y,z),x\big) \;\Leftrightarrow\; (\exists y)\,\alpha\big(y, f(x,z)\big)\Big) \vee \neg\,\beta(x,a),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $a\colon \emptyset$, $\alpha\colon\ =$, $\beta\colon\ \supseteq$, $f\colon \cap$, у зависности од валуације слободних промењљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{aca, buba, lug, leptir, mig, maca\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\ x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи } x \text{ и } y \text{ почињу истим словом} \quad \text{или} \quad \text{је реч } x \text{ дужа од речи } y.$$

а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.
б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Г **I колоквијум из ДМС-а** **Г**

ФОН, 20.04.2013.

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Дате су следеће реченице

I Ако Драгана добије повишицу, отићи ће на скијање или ће купити ташну.

II Драгана ће купити ташну ако добије повишицу или оде на скијање.

III Није тачно: Драгана неће отићи на скијање али ће купити ташну ако не добије повишицу.

IV Драгана ће купити ташну ако добије повишицу и не оде на скијање.

Да ли су ове реченице непротивречне?
За исказну формулу φ која одговара II реченици одредити једну СКНФ и једну КНФ.
За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.
Да ли међу датим реченицама има логички еквивалентних реченица?

2. Дата је скуповна формула F:

$$C \cap D \setminus A \subseteq D \setminus B \ \Rightarrow\ B = C \vartriangle D,$$

где $C \vartriangle D$ представља симетричну разлику скупова C и D.
а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.
б) Представити F преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).
г) Представити и леву и десну страну исказне формуле у једној ДНФ или КНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big((\exists z)\,\alpha\big(f(y,z),x\big)\ \Leftrightarrow\ (\exists y)\,\alpha\big(y,f(x,z)\big)\Big) \vee \neg\,\beta(x,a),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{N}_0$, $a\colon 5$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon \geqslant$, $f\colon +$, у зависности од валуације слободних променљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{ana, beba, cica, maca, top, uf\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\ x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи } x \text{ и } y \text{ почињу истим словом} \quad \text{или} \quad \text{је реч } x \text{ дужа од речи } y.$$

а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.
б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Д **I колоквијум из ДМС-а** **Д**

ФОН, 20.04.2013.

______________________________________ ______________

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Дате су следеће реченице

I Душан ће купити аутомобил ако добије на кладионици и не оде на летовање.

II Душан ће купити аутомобил или неће добити на кладионици нити ће отићи на летовање.

III Ако Душан добије на кладионици или оде на летовање, онда ће купити аутомобил.

IV Није тачно: Душан неће купити аутомобил и неће отићи на летовање ако не добије на кладионици.

Да ли су ове реченице непротивречне?
Да ли је исказна формула φ која одговара II реченици једна КНФ? Ако није одредити КНФ за φ.
За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.
Да ли међу датим реченицама има логички еквивалентних реченица?

2. Дата је скуповна формула F:

$$C \cap (B \triangle D) \subseteq A \;\Leftrightarrow\; A = B \cup C,$$

где $B \triangle D$ представља симетричну разлику скупова B и D.
а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.
б) Представити F преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).
г) Представити и леву и десну страну исказне формуле у једној ДНФ или КНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\exists x)\Big((\exists y)\,\alpha\big(x, f(y,z)\big) \;\Leftrightarrow\; (\forall z)\,\alpha\big(y, f(x,z)\big)\Big) \vee \beta(x,a),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $a\colon \emptyset$, $\alpha\colon\ =$, $\beta\colon\ \subseteq$, $f\colon \cup$, у зависности од валуације слободних промењљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{beba, buca, cica, gica, grad, graf\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$\varrho\colon\ x\,\varrho\,y \ \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}$ речи x и y почињу истим словом или је реч x дужа од речи y.

а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.
б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Решења групе А

1. $k =$ „Душан ће добити на кладионици.“ $\qquad \ell =$ „Душан ће отићи на летовање.“
$a =$ „Душан ће купити аутомобил.“

$\mathrm{I} = k \Rightarrow \ell \vee a, \quad \varphi = \mathrm{II} = k \vee \ell \Rightarrow a, \quad \mathrm{III} = \neg(\neg k \Rightarrow \neg \ell \wedge a), \quad \mathrm{IV} = k \wedge \neg \ell \Rightarrow a, \quad F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}.$

конјункт	k	ℓ	a	$\neg k$	$\neg \ell$	$\neg a$	$\ell \wedge a$	I	$k \vee \ell$	II (φ)	$\neg \ell \wedge a$ (p)	$\neg k \Rightarrow p$	III	$k \wedge \neg \ell$	IV	F	дисјункт
	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	$\neg k \wedge \neg \ell \wedge \neg a$
	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	
$k \vee \neg \ell \vee a$	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	
	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	$\neg k \wedge \ell \wedge a$
$\neg k \vee \ell \vee a$	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	
	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	
$\neg k \vee \neg \ell \vee a$	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	

Изјаве су непротивречне (има бар једна 1 у последњој колони, тј. има две 1 у F).

СКНФ: $\qquad \varphi = (k \vee \neg \ell \vee a) \wedge (\neg k \vee \ell \vee a) \wedge (\neg k \vee \neg \ell \vee a).$

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и неки поједностављенији израз попут: $\qquad \varphi = (\neg \ell \vee a) \wedge (\neg k \vee a).$

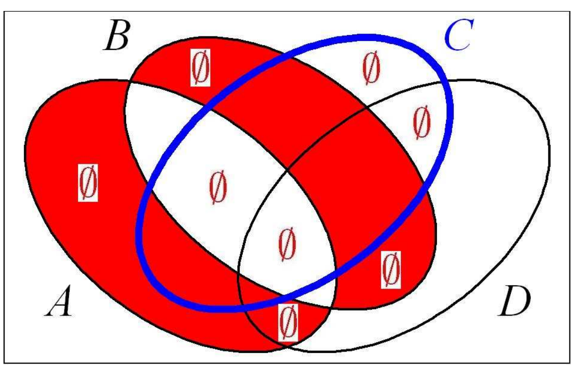
СДНФ: $\qquad F = (\neg k \wedge \neg \ell \wedge \neg a) \vee (\neg k \wedge \ell \wedge a)$

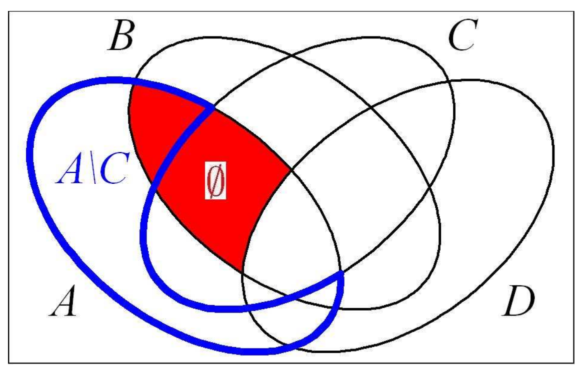
За ДНФ ћемо узети горњу СДНФ.

Како су колоне у таблици које одговарају I и IV реченици исте, то су I и IV реченица логички еквивалентне.

Напомена. Признавано је и ко је узео $\mathrm{III} = \neg(\neg \ell \wedge (\neg k \Rightarrow a)).$

2. а) Лево доле је приказана лева страна скуповне формуле$(A \triangle B; C)$, а десно је приказана десна страна $((A \cap B) \setminus D; A \setminus C)$. На обе слике су са $\emptyset$ означене области у којима не сме бити елемената!





б) $a = x \in A, \quad b = x \in B, \quad c = x \in C, \quad d = x \in D$:

$((a \vee b) \Leftrightarrow c) \Rightarrow (((a \wedge B) \wedge \neg d) \Rightarrow (a \wedge \neg c)).$

(црне заграде МОРАЈУ да се ставе, а црвене не, али оне означавају како се извршавају операције)

в) Јесте таутологија.

г) Леву страну можемо представити преко ДНФ (ту смо по 2 од 8 чланова из СДНФ спојили!):

$\text{Л} = (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c).$

Десну страну представимо у СКНФ (јер има само једна 0), а то је и КНФ (а и ДНФ): $\text{Д} = \neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d.$

3. Формула је $\underline{(\exists x \in \mathbb{N}_0)}\Big(\underline{(\exists y \in \mathbb{N}_0)}\, x = y + z \;\Leftrightarrow\; \underline{(\forall z \in \mathbb{N}_0)}\, y = x + z\Big) \vee x > 8$.

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(x, y, z)$.

Формула $(\exists y \in \mathbb{N}_0)\, x = y + z$ еквивалентна је са $x \geqslant z$, јер је $y = x - z \in \mathbb{N}_0$ (и тад постоји) само ако је $x \geqslant z$. Формула $(\forall z \in \mathbb{N}_0)\, y = x + z$ је увек нетачна (0), јер за сваки природан број z не може да важи да је једнак фиксираном броју $y - x$.

Дакле, формула у загради се своди на $x \geqslant z \;\Leftrightarrow\; 0$, што је исто што и $\neg(x \geqslant z)$, тј. $x < z$.

Даље, полазна формула F своди на $F = (\exists x \in \mathbb{N}_0)\, x < z \vee x > 8$.

Како је формула $(\exists x \in \mathbb{N}_0)\, x < z$ еквивалентна са $z \neq 0$ (ако је $z = 0$ онда не постоји мањи број x у скупу $\mathbb{N}_0$; ако је $z \neq 0$, тј. $z > 0$ онда постоји, нпр. $x = 0$, такво да је $0 = x < z$).

Коначно добијамо да је

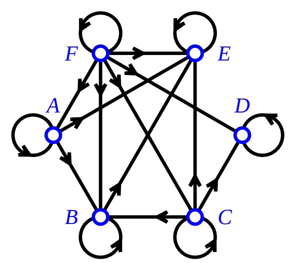
$$v(F) = \begin{cases} 1, & z \neq 0 \\ 1, & x > 8 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. Скуп $A = \{1, 3\}$ има 2 непарна елемента, $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ има 5, $C = \{2, 5\}$ има 1, $D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 23\}$ има 4, $E = \mathbb{N} \setminus \{23\}$ има ∞ много, $F = \emptyset$ нема непарних елемената, тј. има их 0. Како сви ови скупови имају међусобно различит број непарних елемената релација се своди на $x \,\varrho\, y \;\overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\; x \subseteq y$.

Напомена. Није $x \,\varrho\, y \;\overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\; x \subset y$, јер кад је $y = x$ онда су то исти скупови и они имају исти број непарних елемената, па зато важи и $x \,\varrho\, x$!

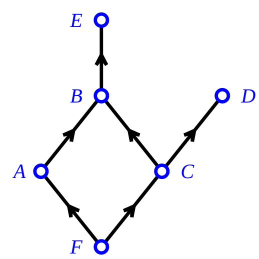
б)

ϱ	A	B	C	D	E	F
A	1	1	0	0	1	0
B	0	1	0	0	1	0
C	0	1	1	1	1	0
D	0	0	0	1	0	0
E	0	0	0	0	1	0
F	1	1	1	1	1	1



г) Није релација еквиваленције, јер није **C** ($A \,\varrho\, B \;\Rightarrow\; B \,\varrho\, A$ $\lightning$). Јесте релација поретка, јер је **P**, **AC** и **T**.

д) Ово је релација парцијалног поретка, јер њен Хасеов дијаграм приказан на наредној слици није ланац. Такође, исти закључак можемо добити и из $D \not\varrho\, E$ и $E \not\varrho\, D$.



Најмањи елемент је F, јер је он у релацији са свим осталим (у таблици у врсти која одговара F су све 1; у графу из F води грана у све чворове), па је он и једини минимални елемент.

Максималан елемент је D, јер не постоји ниједан $x \neq D$ који је у релацији са њим $D \,\varrho\, x$ (у таблици су у његовој врсти све 0 сем на главној дијагонали где је 1; у графу не улази ниједна грана у D сем петље). Аналогно се добија да је и E максималан елемент.

Дакле, максимални елементи су D и E. Како има више максималних елемената, не постоји највећи елемент.

Резултати групе Б

1. $p =$ „Драгана ће добити повишицу.“ $\quad s =$ „Драгана ће отићи на скијање.“
$t =$ „Драгана ће купити ташну.“

$\mathrm{I} = p \wedge \neg s \;\Rightarrow\; t, \quad \varphi = \mathrm{II} = t \vee (\neg p \wedge \neg s), \quad \mathrm{III} = p \vee s \;\Rightarrow\; t, \quad \mathrm{IV} = \neg(\neg p \;\Rightarrow\; \neg t \wedge \neg s, \quad F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}.$

Изјаве су непротивречне (има бар једна 1 у последњој колони, тј. има две 1 у F).

Исказна формула $\varphi = t \vee (\neg p \wedge \neg s)$ није КНФ, јер она није ни дисјункт (дисјункција литерала, јер $\neg p \wedge \neg s$ није литерал) ни коњункција дисјунката (између чланова је $\vee$ а не $\wedge$). Она би била једна ДНФ!

Како није КНФ, одредићемо њену СКНФ: $\quad \varphi = (p \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg p \vee s \vee t) \wedge (\neg p \vee \neg s \vee t).$

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и једноставнији израз: $\quad \varphi = (\neg s \vee t) \wedge (\neg p \vee t).$

СДНФ: $\quad F = (\neg p \wedge \neg s \wedge t) \vee (\neg p \wedge s \wedge t)$

За ДНФ можемо узети горњу СДНФ, али и једноставнији израз: $\quad F = \neg p \wedge t.$

Како су колоне у таблици које одговарају II и III реченици исте, то су II и III реченица логички еквивалентне.

2. б) $a = x \in A, \quad b = x \in B, \quad c = x \in C, \quad d = x \in D$:

$((b \vee c) \;\Leftrightarrow\; d) \;\Rightarrow\; (((a \veebar c) \wedge b) \;\Rightarrow\; d).$

(црне заграде МОРАЈУ да се ставе, а црвене не, али оне означавају како се извршавају операције)

в) Јесте таутологија.

г) Леву страну можемо представити преко ДНФ (ту смо неке од чланова из СДНФ спојили!):

$\text{Л} = (b \wedge d) \vee (c \wedge d) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg d).$

Десну страну представимо у СКНФ (јер има само две 0), а то је и КНФ: $\text{Д} = (a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee d).$

3. Формула је $\underline{(\forall x \subseteq A)} \Big(\underline{(\exists z \subseteq A)}\, y \cap z = x \;\Leftrightarrow\; \underline{(\exists y \subseteq A)}\, y = x \cap z \Big) \vee \neg(x \supseteq \emptyset).$

Ту су црвено означене везане промењљиве, а плаво слободне промењљиве, па је формула облика $F(x, y, z)$.

Формула $(\exists z \subseteq A)\, y \cap z = x$ еквивалентна је са $x \subseteq y$ (ако је $x \subseteq y$ онда можемо узети $z = x$, а ако је $x \nsubseteq y$, онда постоји елемент $m \in x$, такав да $m \notin y$, али онда $m \notin y \cap z$, па не важи $x = y \cap z$ ни за једно z).
Формула $(\exists y \subseteq A)\, y = x \cap z$ је увек тачна (1), јер за фиксиране x и z увек постоји и њихов пресек $x \cap z$.

Дакле, формула у загради се своди на $x \subseteq y \;\Leftrightarrow\; 1$, што је исто што и $x \subseteq y$.

Формула $\neg(x \supseteq \emptyset)$ се своди на $x \subset 0$, што је увек нетачно (0), јер $\emptyset$ нема правих подскупова.

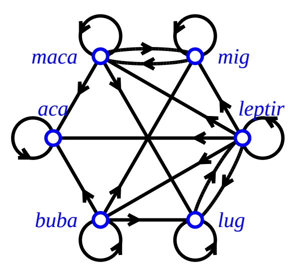
Даље, полазна формула F своди на $F = (\forall x \subseteq A)\, x \subseteq y \vee 0$, што је исто што $F = (\forall x \subseteq A)\, x \subseteq y$.

Ова формула ће бити тачна за свако x само ако је $y = A$ (ако је $y \neq A$ не важи за свако x, нпр. за $x = A$; ако је $y = A$ онда је за свако $x \subset A$ испуњено $x \subseteq y = A$), па добијамо да је $v(F) = \begin{cases} 1, & y = A \\ 0, & y \neq A. \end{cases}$

Када је $A = \emptyset$ формула F је увек тачна, тј. $v(F) = 1$.

4. б)

ϱ	*aca*	*buba*	*lug*	*leptir*	*mig*	*maca*
aca	1	0	0	0	0	0
buba	1	1	1	0	1	0
lug	0	0	1	1	0	0
leptir	1	1	1	1	1	1
mig	0	0	0	0	1	1
maca	1	0	1	0	1	1



в) Јесте **Р** јер свака реч почиње истим словом као и она сама.

Није **С**, јер $buba\,\varrho\,aca \;\Rightarrow\; aca\,\varrho\,buba$ ↯.

Није **АС**, јер $maca\,\varrho\,mig,\ mig\,\varrho\,maca \;\Rightarrow\; maca = mig$ ↯.

Није **Т**, јер $maca\,\varrho\,lug,\ lug\,\varrho\,leptir \;\Rightarrow\; maca\,\varrho\,leptir$ ↯.

г) Како релација није **Т**, она није ни релација еквиваленције, ни релација поретка.

д) С обзиром на резултате под г), овде не мора ништа да се ради!

Резултати групе Г

1. $p =$ „Драгана ће добити повишицу.“ $s =$ „Драгана ће отићи на скијање.“
$t =$ „Драгана ће купити ташну.“

$\mathrm{I} = p \Rightarrow s \vee t$, $\varphi = \mathrm{II} = p \vee s \Rightarrow t$, $\mathrm{III} = \neg(\neg p \Rightarrow \neg s \wedge t)$, $\mathrm{IV} = p \wedge \neg s \Rightarrow t$, $F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}$.

Изјаве су непротивречне (има бар једна 1 у последњој колони, тј. има две 1 у F).

СКНФ: $\varphi = (p \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg p \vee s \vee t) \wedge (\neg p \vee \neg s \vee t)$.

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и неки поједностављенији израз попут: $\varphi = (\neg s \vee t) \wedge (\neg p \vee t)$.

СДНФ: $F = (\neg p \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge s \wedge t)$

За ДНФ ћемо узети горњу СДНФ.

Како су колоне у таблици које одговарају I и IV реченици исте, то су I и IV реченица логички еквивалентне.

Напомена. Признавано је и ко је узео $\mathrm{III} = \neg(\neg s \wedge (\neg p \Rightarrow t))$.

2. б) $a = x \in A$, $b = x \in B$, $c = x \in C$, $d = x \in D$:
$(((c \wedge d) \wedge \neg a) \Rightarrow (d \wedge \neg b)) \Rightarrow (b \Leftrightarrow (c \vee d))$.
(црне заграде МОРАЈУ да се ставе, а црвене не, али оне означавају како се извршавају операције)

в) Није таутологија (у последњој колони има седам 0).

г) Леву страну можемо представити преко ДНФ (ту смо по 2 од 8 чланова из СДНФ спојили!):
$\text{Л} = (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (\neg b \wedge c \wedge d) \vee (b \wedge \neg c \wedge d) \vee (b \wedge c \wedge \neg d)$.
Десну страну представимо у СКНФ (јер има само једна 0), а то је и КНФ (а и ДНФ): $\text{Д} = a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d$.

3. Формула је $\underline{(\forall x \in \mathbb{N}_0)}\Big(\underline{(\exists z \in \mathbb{N}_0)}\, y + z = x \Leftrightarrow \underline{(\exists y \in \mathbb{N}_0)}\, y = x + z\Big) \vee \neg(x \geqslant 5)$.

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(x, y, z)$.

Формула $(\exists z \in \mathbb{N}_0)\, y + z = x$ еквивалентна је са $x \geqslant y$, јер је $z = x - y \in \mathbb{N}_0$ (и тад постоји) само ако је $x \geqslant y$.
Формула $(\exists y \in \mathbb{N}_0)\, y = x + z$ је увек тачна (1), јер за фиксиране x и z увек постоји и њихов збир $x + z$.

Дакле, формула у загради се своди на $x \geqslant y \Leftrightarrow 1$, што је исто што и $x \geqslant y$.

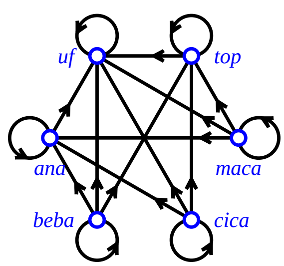
Формула $\neg(x \geqslant 5)$ је једнака $x < 5$.

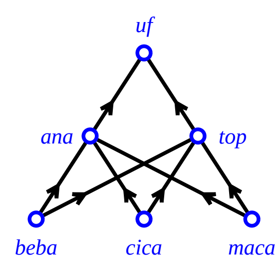
Даље, полазна формула F своди на $F = (\forall x \in \mathbb{N}_0)\, x \geqslant y \vee x < 5$, што је исто што $F = y = 0 \vee x < 5$, јер је формула $(\forall x \in \mathbb{N}_0)\, x \geqslant y$ тачна ако и само ако је $y = 0$ (ако је $y > 0$ не важи за свако x, нпр. за $x = 0$; ако је $y = 0$ онда је за свако $x \in \mathbb{N}_0$ испуњено $x \geqslant y = 0$).

Коначно добијамо да је
$$v(F) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 1, & x < 5 \\ 0, & y \neq 0,\ x \geqslant 5. \end{cases}$$

4. б)

ϱ	*ana*	*beba*	*cica*	*maca*	*top*	*uf*
ana	1	0	0	0	0	1
beba	1	1	0	0	1	1
cica	1	0	1	0	1	1
maca	1	0	0	1	1	1
top	0	0	0	0	1	1
uf	0	0	0	0	0	1





г) Није релација еквиваленције, јер није **С** ($top\ \varrho\ uf \Rightarrow uf\ \varrho\ top$ ↯).
Јесте релација поретка, јер је **Р**, **АС** и **Т**.

д) Ово је релација парцијалног поретка, јер њен Хасеов дијаграм приказан на слици десно није ланац. Такође, исти закључак можемо добити и из $beba \not\varrho\ cica$ и $cica \not\varrho\ beba$.

Највећи елемент је uf, јер су сви остали у релацији са њим (у таблици у колони која одговара uf су све 1; у графу у F води грана из свих чворова), па је он и једини максимални елемент.

Минималан елемент је реч *beba*, јер не постоји ниједна реч $x \neq beba$ са којим је она у релацији $x\ \varrho\ beba$ (у таблици су у његовој колони све 0 сем на главној дијагонали где је 1; у графу не улази ниједна грана у *beba* сем петље). Аналогно се добија да су и *cica* и *maca* максимални елементи.
Дакле, минимални елементи су *beba*, *cica* и *maca*. Како има више минималних елемената, не постоји најмањи елемент.

Резултати групе Д

1. $k =$ „Душан ће добити на кладионици.“ $\quad \ell =$ „Душан ће отићи на летовање.“
$a =$ „Душан ће купити аутомобил.“

$\mathrm{I} = k \wedge \neg\ell \;\Rightarrow\; a, \quad \varphi = \mathrm{II} = a \vee (\neg k \wedge \neg\ell), \quad \mathrm{III} = k \vee \ell \;\Rightarrow\; a, \quad \mathrm{IV} = \neg(\neg k \;\Rightarrow\; \neg\ell \wedge \neg a, \quad F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}.$

Изјаве су непротивречне (има бар једна 1 у последњој колони, тј. има две 1 у F).

Исказна формула $\varphi = a \vee (\neg k \wedge \neg\ell)$ није КНФ, јер она није ни дисјункт (дисјункција литерала, јер $\neg k \wedge \neg\ell$ није литерал) ни коњункција дисјунката (између чланова је $\vee$ а не $\wedge$). Она би била једна ДНФ!

Како није КНФ, одредићемо њену СКНФ: $\quad \varphi = (k \vee \neg\ell \vee a) \wedge (\neg k \vee \ell \vee a) \wedge (\neg k \vee \neg\ell \vee a).$

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и једноставнији израз: $\quad \varphi = (\neg\ell \vee a) \wedge (\neg k \vee a).$

СДНФ: $\quad F = (\neg k \wedge \neg\ell \wedge a) \vee (\neg k \wedge \ell \wedge a)$

За ДНФ можемо узети горњу СДНФ, али и једноставнији израз: $\quad F = \neg k \wedge a.$

Како су колоне у таблици које одговарају II и III реченици исте, то су II и III еквивалентне.

2. б) $a = x \in A, \quad b = x \in B, \quad c = x \in C, \quad d = x \in D$: $\qquad ((c \wedge (b \veebar d)) \;\Rightarrow\; a) \;\Leftrightarrow\; (a \;\Leftrightarrow\; (b \vee c)).$

(црне заграде МОРАЈУ да се ставе, а црвене не, али оне означавају како се извршавају операције)

в) Није таутологија (у последњој колони има шест 0).

г) Леву страну представимо у СКНФ (јер има само две 0), а то је и КНФ: $\text{Д} = (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c \vee d).$

Десну страну можемо представити преко ДНФ (ту смо по неколико од 8 чланова из СДНФ спојили!):

$\text{Л} = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c).$

3. Формула је $\underline{(\exists x \subseteq A)}\Big(\underline{(\exists y \subseteq A)}\, x = y \cup z \;\Leftrightarrow\; \underline{(\forall z \subseteq A)}\, y = x \cup z\Big) \vee x \subseteq \emptyset.$

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(x, y, z)$.

Формула $(\exists y \subseteq A)\, x = y \cup z$ еквивалентна је са $z \subseteq x$ (ако је $z \subseteq x$ онда можемо узети $y = x$, а ако је $z \not\subseteq x$, онда постоји елемент $m \in z$, такав да $m \notin x$, али онда $m \in y \cup z$, па не важи $x = y \cup z$ ни за једно y).
Формула $(\forall z \subseteq A)\, y = x \cup z$ је тачна ако и само ако је $x = A$ и $y = A$.
а формула $x \subseteq \emptyset$ еквивалентна је са $x = \emptyset$.

За формулу у загради, $\varphi = (\exists y \subseteq A)\, x = y \cup z \;\Leftrightarrow\; (\forall z \subseteq A)\, y = x \cup z$, имамо да је еквивалентна са $z \subseteq x \;\Leftrightarrow\; x = A \wedge y = A$, што је тачно у 2 случаја: $0 \;\Leftrightarrow\; 0$ и $1 \;\Leftrightarrow\; 1$, па је

$$v(\varphi) = \begin{cases} 1, & x = A,\ y = A \\ 1, & z \not\subseteq x,\ x \neq A \\ 1, & z \not\subseteq x,\ y \neq A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(овде смо први случај са $z \subseteq x, x = A, y = A$ свели на само $x = A, y = A$, јер кад је $x = A$ онда је и $z \subseteq x$).

Сада остаје још да прођемо квантификатором $(\exists x)$ кроз формулу φ.

Када је $y = A$, за x у $(\exists x)$ бирамо $x = A$, па је формула $(\exists x \subseteq A)\, \varphi$ тачна.

Када је $z \neq \emptyset$, за x у $(\exists x)$ можемо изабрати $x = \emptyset$, па ће бити $z \not\subseteq x$ и $x \neq A$, те је формула $(\exists x \subseteq A)\, \varphi$ тачна.

Када је $y \neq A$ и $z = \emptyset$, формула $(\exists x \subseteq A)\, \varphi$ је нетачна.

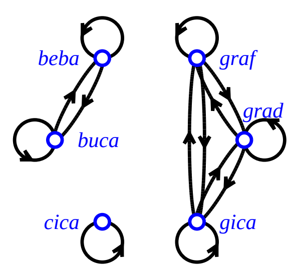
Коначно добијамо да је

$$v(F) = \begin{cases} 1, & x = \emptyset \\ 1, & y = A \\ 1, & z \neq \emptyset \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Када је $A = \emptyset$ формула F је увек тачна, тј. $v(F) = 1$
(важи десна страна дисјункције $x \subseteq \emptyset$, јер је $x = \emptyset$).

4. б)

ϱ	$beba$	$buca$	$cica$	$gica$	$grad$	$graf$
$beba$	1	1	0	0	0	0
$buca$	1	1	0	0	0	0
$cica$	0	0	1	0	0	0
$gica$	0	0	0	1	1	1
$grad$	0	0	0	1	1	1
$graf$	0	0	0	1	1	1



г) Није релација поретка, јер није **АС** ($beba\, \varrho\, buca,\ buca\, \varrho\, beba \;\Rightarrow\; beba = buca$ ↯).
Јесте релација еквиваленције, јер је **Р**, **С** и **Т**.

д) Класе еквиваленције су:

$[beba] = [buca] = \{beba, buca\},\ [cica] = \{cica\},\ [gica] = [grad] = [graf] = \{gica, grad, graf\}.$